Inéquations du premier degré

1. Comparaison de deux nombres

Dans toute cette partie, a et b sont des réels.

PROPRIÉTÉ : (admise)

Dans l'ensemble $\mathbb{R}$, il est toujours possible de comparer deux nombres a et b. On peut ainsi les classer dans l'ordre croissant.

Notation : Trois cas sont envisageables :

- soit a est plus grand que b. On note $a > b$ et on lit « a est strictement supérieur à b »
- soit a est plus petit que b. On note $a < b$ et on lit « a est strictement inférieur à b »
- soit a et b sont égaux. On note $a = b$ et on lit « a est égal à b »

On peut aussi regrouper :

- si $a > b$ ou $a = b$, on peut noter $a \geqslant b$ et on lit « a est supérieur ou égal à b ».
- si $a < b$ ou $a = b$, on peut noter $a \leqslant b$ et on lit « a est inférieur ou égal à b ».

Exemple

$\frac{4}{9} = \ldots\ldots\ldots\ldots$ et $\frac{3}{7} = \ldots\ldots\ldots\ldots$ donc $\frac{3}{7} \ldots\ldots \frac{4}{9}$.

DÉFINITION : Inégalités

$a > b$, $a < b$, $a \geqslant b$ et $a \leqslant b$ s'appellent des inégalités. On parle d'inégalités strictes pour $<$ et $>$ et d'inégalités larges pour $\leqslant$ et $\geqslant$.

Remarque :

- Les propriétés classiques pour $>$ sont identiques pour $<$ puisque $a < b$ est synonyme de $b > a$: il suffit de permuter a et b.
- De même, celles pour $<$ (et pour $>$) sont le plus souvent aussi applicables à $\leqslant$ (et à $\geqslant$).

PROPRIÉTÉ :

« Comparer deux nombres, c'est trouver le signe de leur différence »
Ainsi $a < b$ ----------------------------------
De même, $a > b$ ----------------------------------

Exemple

$\sqrt{2} \approx \ldots\ldots\ldots$ et $\sqrt{3} \approx \ldots\ldots\ldots$ donc $\sqrt{2} \ldots\ldots\ldots \sqrt{3}$.
Ainsi $\sqrt{2} - \sqrt{3} \ldots\ldots\ldots\ 0$.

En allemand...

- die Ungleichheit

2. Opérations sur les inégalités

PROPRIÉTÉ : (addition)

« L'ordre de deux nombres est conservé si on leur ajoute le même nombre ».
Pour tous a, b et c réels,

PROPRIÉTÉ : (multiplication)

« L'ordre de deux nombres est conservé si on les multiplie par un même nombre strictement positif ».

Pour tous a et b réels et c réel strictement positif,

« L'ordre de deux nombres est inversé si on les multiplie par un même nombre strictement négatif ».

Pour tous a et b réels et c réel strictement négatif,

PROPRIÉTÉ : (soustraction et division)

Soit c un réel non nul. On a les mêmes propriétés que précédemment puisque

- soustraire c, c'est ajouter ---------------- ,
- diviser par c, c'est multiplier par --------- .

Exemples

- Si $x < 3$ alors $x - 3 \ldots\ldots\ldots\ 0$
- Si $x \geqslant -\frac{4}{5}$ alors $5x \ldots\ldots\ldots\ -4$
- Si $3x \leqslant -2$ alors $x \ldots\ldots\ldots\ -\frac{2}{3}$
- (**Attention !**) Si $-2x > 4$ alors $x \ldots\ldots\ldots\ -2$
- Si $3x + 2 \geqslant 5$ alors $x \ldots\ldots\ldots\ 1$

En allemand...

- die Ungleichung

3. Résolution d'une inéquation

DÉFINITION :

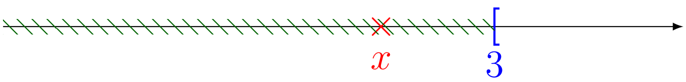
Résoudre une inéquation, c'est chercher l'ensemble des valeurs de x telles que l'inégalité est vérifiée.

Exemple

$5x-2<3x+4$	Inéquation de départ
	On soustrait $3x$ dans les deux membres
	On réduit
	On ajoute 2 dans les deux membres
	On réduit
	On divise par 2 en gardant le sens de l'inégalité car $2>0$.

Les valeurs de x vérifiant $5x-2<3x+4$ sont les nombres strictement inférieurs à 3.

On peut représenter les solutions ainsi :



MÉTHODE : Résolution d'inéquations

Pour résoudre une inéquation du premier degré, on commence par isoler les termes « qui contiennent x » dans un des deux membres de l'inégalité, puis on regroupe les termes constants dans l'autre, et enfin, on simplifie.

En allemand...

- Eine Ungleichung lösen

4. Signes d'une expression de la forme $ax+b$

DÉFINITION :

Déterminer le signe d'une expression, c'est trouver pour quelles valeurs de x cette expression est positive, négative ou égale à 0.

Exemple

Déterminer le signe de $2x-4$, c'est déterminer les valeurs de x telles que $2x-4>0$, puis telles que $2x-4<0$ et enfin $2x-4=0$.

MÉTHODE : Déterminer le signe

Déterminer le signe d'une expression revient à résoudre des inéquations.

Exemple

$2x-4<0$	$2x-4=0$	$2x-4>0$
....	....	....
....	....	....

Ainsi,

- $2x-4<0$ si et seulement si ______________
- $2x-4=0$ si et seulement si ______________
- $2x-4>0$ si et seulement si ______________

On regroupe souvent les résultats dans un tableau.

DÉFINITION : Tableau de signes

Le tableau de signes d'une expression est le tableau dans lequel sont notés les signes de l'expression.

Exemple

Pour l'exemple précédent, on obtient :

Exemple

Le tableau de signes de l'expression $-3x+9$ est :

PROPRIÉTÉ :

Soient a et b deux réels.

- Si $a>0$, alors le tableau de signes de $ax+b$ est :

- Si $a<0$, alors le tableau de signes de $ax+b$ est
