Ensembles de nombres

1. Ensembles fondamentaux de nombres

■ DÉFINITION : Ensemble des entiers naturels

L'ensemble des entiers naturels est noté $\mathbb{N}$. Ainsi

Exemples

$3 \ldots\ldots\ldots \mathbb{N}$ $\quad$ $1,5 \ldots\ldots\ldots \mathbb{N}$

$0 \ldots\ldots\ldots \mathbb{N}$ $\quad$ $-5 \ldots\ldots\ldots \mathbb{N}$

■ DÉFINITION : Ensemble des entiers relatifs

L'ensemble des entiers relatifs est noté $\mathbb{Z}$. Ainsi

Remarque : $\mathbb{Z}$ contient $\mathbb{N}$. On dit aussi $\mathbb{N}$ est inclus dans $\mathbb{Z}$, noté ______________________

Exemples

$9 \ldots\ldots\ldots \mathbb{Z}$ $\quad$ $-5 \ldots\ldots\ldots \mathbb{Z}$

$0 \ldots\ldots\ldots \mathbb{Z}$ $\quad$ $\frac{3}{4} \ldots\ldots\ldots \mathbb{Z}$

■ DÉFINITION : Ensemble des nombres rationnels

L'ensemble des nombres rationnels est noté $\mathbb{Q}$. Ainsi

Notation : On note une étoile en haut à droite de l'ensemble pour retirer 0 à cet ensemble. Ainsi :

- $\mathbb{N}^*$ est l'ensemble $\{1 ; 2 ; \ldots\}$
- $\mathbb{Z}^*$ est l'ensemble des entiers relatifs non nuls. On le note aussi $\mathbb{Z} \setminus \{0\}$.

Remarque : $\mathbb{Q}$ contient $\mathbb{Z}$, donc $\mathbb{Q}$ contient aussi $\mathbb{N}$. On dit aussi $\mathbb{Z}$ est inclus dans $\mathbb{Q}$, noté .... On obtient __________________

Exemples

$10 \ldots\ldots\ldots \mathbb{Q}$ $\quad$ $-2 \ldots\ldots\ldots \mathbb{Q}$

$\frac{5}{8} \ldots\ldots\ldots \mathbb{Q}$ $\quad$ $-\frac{10}{3} \ldots\ldots\ldots \mathbb{Q}$

$\pi \ldots\ldots\ldots \mathbb{Q}$. $\quad$ $\sqrt{2} \ldots\ldots\ldots \mathbb{Q}$

■ DÉFINITION : Ensemble des nombres réels

L'ensemble des nombres réels est noté $\mathbb{R}$.

Remarque : $\mathbb{R}$ contient $\mathbb{Q}$, donc $\mathbb{R}$ contient aussi $\mathbb{Z}$ et $\mathbb{N}$. On dit aussi $\mathbb{Q}$ est inclus dans $\mathbb{R}$, noté ______________________________ .

On obtient finalement ____________________

Exemples

$-1,3 \ldots\ldots\ldots \mathbb{R}$ $\quad$ $0 \ldots\ldots\ldots \mathbb{R}$

$4 \ldots\ldots\ldots \mathbb{R}$ $\quad$ $\frac{47}{13} \ldots\ldots\ldots \mathbb{R}$

$\pi \ldots\ldots\ldots \mathbb{R}$ $\quad$ $\sqrt{2} \ldots\ldots\ldots \mathbb{R}$

À RETENIR :

En allemand...

- En Allemagne, $\mathbb{N} = \{1 ; 2 ; \ldots\}$ ne contient pas 0.
  On note $\mathbb{N}_0 = \{0 ; 1 ; 2 ; \ldots\}$.
- $\mathbb{N}$ ist die Menge der natürlichen Zahlen
- $\mathbb{Z}$ ist die Menge der ganzen Zahlen
- $\mathbb{Q}$ die Menge der rationalen Zahlen
- $\mathbb{R}$ die Menge der reelen Zahlen

2. Intervalles

Soient $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}$ tels que $a < b$.

A. Définition

DÉFINITION : Intervalle fermé

$[a\ ;\ b]$ est l'ensemble des nombres $x \in \mathbb{R}$ tels que $x \geqslant a$ et $x \leqslant b$.

Exemple : Soit $I = [3\ ;\ 5]$.

x

$4,2$..........I $\quad$ $5,1$..........I

3..........I $\quad$ 5..........I

DÉFINITION : Intervalle ouvert

$]a\ ;\ b[$ est l'ensemble des nombres $x \in \mathbb{R}$ tels que $x > a$ et $x < b$.

Exemple : Soit $I =]0\ ;\ 1[$.

x

0..........I $\quad$ 1..........I

$\frac{3}{4}$..........I $\quad$ $0,000\,1$..........I

DÉFINITION : Intervalle semi-ouvert à droite

$[a\ ;\ b[$ est l'ensemble des nombres $x \in \mathbb{R}$ tels que $x \geqslant a$ et $x < b$.

Exemple : Soit $I = [-1\ ;\ 1[$.

x

$-\frac{3}{2}$..........I $\quad$ 1..........I

0..........I $\quad$ $-1,3$..........I

DÉFINITION : Intervalle semi-ouvert à gauche

$]a\ ;\ b]$ est l'ensemble des nombres $x \in \mathbb{R}$ tels que $x > a$ et $x \leqslant b$.

Exemple : Soit $I = \left]0\ ;\ \frac{1}{2}\right]$.

x

$0,25$..........I $\quad$ $0,5$..........I

0..........I $\quad$ $\frac{1}{3}$..........I

B. Extension de la notion d'intervalle

DÉFINITION :

$]-\infty\ ;\ a]$ est l'ensemble des nombres réels x tels que $x \leqslant a$.

x

Exemple : Soit $I =]-\infty\ ;\ 3]$.

x

$0,25$..........I $\quad$ -3..........I

3..........I $\quad$ π..........I

DÉFINITION :

$]-\infty\ ;\ a[$ est l'ensemble des nombres réels x tels que $x < a$.

x

DÉFINITION :

$[a\ ;\ +\infty[$ est l'ensemble des nombres réels x tels que $x \geqslant a$.

x

DÉFINITION :

$]a\ ;\ +\infty[$ est l'ensemble des nombres réels x tels que $x > a$.

x

Exemple :

$]-\infty\ ;\ +\infty[= \mathbb{R}$

x

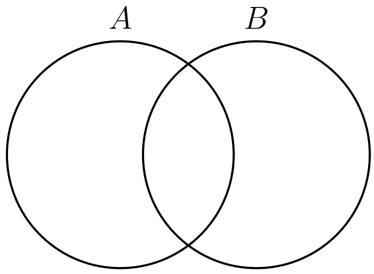
En allemand...

- das geschlossene / offene / halboffene Intervall

3. Intersection et réunion d'intervalles

DÉFINITION : Intersection d'intervalles

L'intersection des intervalles I et J, notée $I \cap J$, est l'ensemble constitué des éléments qui sont dans I et aussi dans J.



Remarque : On lit « I inter J » pour $I \cap J$.

Exemple :
$I = [-3\ ;\ 5[$ et $J =]2\ ;\ 8]$.

$I \cap J =$ ....

Exemple :
$I =]-3\ ;\ 2[$ et $J = [-5\ ;\ 6[$.

$I \cap J =]-3\ ;\ 2[$.

Remarque : Ici $I \cap J =$ ....

Exemple :
$I = [-5\ ;\ 0]$ et $J =]2\ ;\ 5[$.

DÉFINITION : Ensemble vide

On appelle ensemble vide l'ensemble qui ne contient aucun élément. On le note $\emptyset$.

Ainsi $I \cap J =$ ....

Exemple :
$I = [5\ ;\ 8]$ et $J =]-2\ ;\ 5]$.

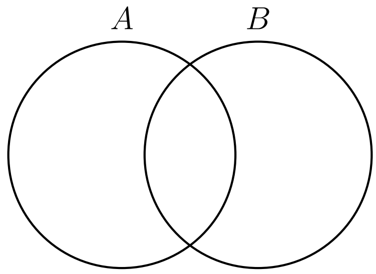
$I \cap J =$ ....

DÉFINITION : Singleton

On appelle singleton un ensemble qui contient seul élément.

DÉFINITION : Réunion d'intervalles

La réunion des intervalles I et J, notée $I \cup J$, est l'ensemble constitué des éléments qui sont dans I ou (inclusif) dans J.



Remarque : On lit « I union J » pour $I \cup J$.

Exemple :
$I = [1\ ;\ 5]$ et $J = [4\ ;\ 9[$.

$I \cup J =$ ....

Exemple :
$I =]-1\ ;\ 3[$ et $J =]6\ ;\ 10]$.

$I \cup J =$ ....

Remarque : Dans ce cas, la réunion des deux intervalles n'est pas un intervalle.

De plus, ...

Exemple :
$I =]3\ ;\ 5[$ et $J =]-2\ ;\ 11]$.

$I \cup J =$ ....

Remarque : Ici ....

En allemand...

- der Durchschnitt
- die Vereinigung
- die leere Menge
- die einelementige Menge