Exercices sur les suites

1 Énoncés

1.1 À la montagne...

Le conseil municipal d'une station touristique de montagne a décidé de faire équiper une falaise afin de créer un site d'escalade. L'équipement doit se faire depuis le pied de la falaise. Deux entreprises spécialisées dans ce type de chantier ont été contactées et ont envoyé des devis. On se propose d'étudier ceux-ci :

- **Devis A** : Le premier mètre équipé coûte 100 € puis chaque mètre supplémentaire équipé coûte 20 € de plus que le mètre précédent (100 € pour équiper une falaise d'un mètre, $100+120=220$ € pour équiper une falaise de deux mètres, $100+120+140=360$ pour équiper une falaise de trois mètres, etc.)

- **Devis B** : Le premier mètre équipé coûte 50 € puis chaque mètre supplémentaire équipé coûte 5% de plus que le mètre précédent (50 € pour équiper une falaise d'un mètre, $50+52,50=102,50$ € pour équiper une falaise de deux mètres, $50+52,50+55,215=157,625$ € pour équiper une falaise de trois mètres, etc.)

On appelle u_n le prix d'un n-ième mètre équipé et S_n le prix de l'équipement d'une falaise de n mètres de hauteur indiqué par l'entreprise A.
On appelle v_n le prix d'un n-ième mètre équipé et R_n le prix de l'équipement d'une falaise de n mètres de hauteur indiqué par l'entreprise B.

1. Exprimer u_n et S_n en fonction de n.

2. Exprimer v_n et R_n en fonction de n.

3. Calculer le prix à payer pour équiper une falaise de 92 mètres de hauteur avec chacune des deux entreprises. Préciser l'entreprise la moins chère. On arrondira les prix à l'euro près.

4. Le conseil municipal a décidé d'accorder un budget de 120 000 € pour équiper le site. Calculer la hauteur de la falaise qui peut être équipée avec cette somme par chacune des deux entreprises A et B (on arrondira les hauteurs au mètre près).

1.2 Le mondial de football

Lors du Mondial de 1998, l'équipe de France de football a disputé 7 matches : 3 matches de poule, un huitième de final, un quart de finale, une demi-finale et la finale.
Dans un petit village de France de 600 habitants, 400 personnes ont regardé la première rencontre à la télévision.

Par la suite, on a constaté que :

- parmi toutes les personnes qui ont regardé un match, quatre seulement n'ont pas regardé le match suivant.
- parmi toutes les personnes qui n'ont pas vu un match, la moitié ont regardé le suivant.

On appelle u_n le nombre de personne ayant vu le $n^{\text{ième}}$.

1. Déterminer u_1, u_2, u_3 et u_4.

2. Montrer que pour tout entier naturel n tel que $1 \leqslant n \leqslant 6$, $u_{n+1} = \dfrac{1}{2}u_n + 296$.
   On pourra utiliser le nombre de personnes qui n'ont pas vu le $n^{\text{ième}}$ match.

3. Soit $(v_n)\,1 \leqslant n \leqslant 7$ la suite définie par : $v_n = u_n - 592$.
   Montrer que $(v_n)\,1 \leqslant n \leqslant 7$ est une suite géométrique.
   Quel est son premier terme ? Quelle est sa raison ?

4. Exprimer v_n en fonction de n, puis u_n en fonction de n.

5. Quel est le nombre d'habitants du village qui n'ont pas vu la finale ?

1.3 Sylvain à la banque

Sylvain a placé 2000 euros le 31 décembre 2002 sur son livret bancaire, à intérêts composés au taux annuel de $3,5$ %.

À partir de l'année suivante, il a prévu de placer, chaque 31 décembre, 700 euros supplémentaires sur son livret.

On désigne par C_n le capital, exprimé en euros, disponible le 1$^{\text{er}}$ janvier de l'année $2003 + n$. On a donc $C_0 = 2000$.

1. Déterminer C_1, c'est-à-dire le capital disponible le 1$^{\text{er}}$ janvier de l'année 2004.
   Déterminer C_2, c'est-à-dire le capital disponible le 1$^{\text{er}}$ janvier de l'année 2005.
   Déterminer C_3, c'est-à-dire le capital disponible le 1$^{\text{er}}$ janvier de l'année 2006.

2. La suite $(C_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite arithmético-géométrique.
   Établir, pour tout entier n, la relation entre C_{n+1} et C_n.

3. Pour tout entier naturel n, on pose $v_n = C_n + 20000$.
   Montrer que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique.
   Quel est son premier terme ? Quelle est sa raison ?

4. Exprimer v_n en fonction de n.
   Montrer que, pour tout entier naturel n, $C_n = 22000 \times (1,035)^n - 20000$.

5. Déterminer le capital disponible le 1$^{\text{er}}$ janvier 2008 (on arrondira le résultat à l'euro près).

6. Le 1$^{\text{er}}$ janvier d'une certaine année, le capital initial de Sylvain aura quintuplé.
   Quelle est cette année ?

2 Corrigés

2.1 À la montagne...

1. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ la suite arithmétique de premier terme $u_1 = 100$ et de raison $r = 20$

$$\begin{array}{rrcl}
\text{On a } \forall n \in \mathbb{N}^*, & u_n & = & u_1 + (n-1)\,r \\
 & u_n & = & 100 + 20\,(n-1) \\
\text{Donc} & u_n & = & 80 + 20n
\end{array}$$

$$\begin{array}{rrcl}
\text{On a } \forall n \in \mathbb{N}^*, & S_n & = & n\dfrac{u_1 + u_n}{2} \\
 & S_n & = & n\dfrac{100 + 80 + 20n}{2} \\
 & S_n & = & n\dfrac{180 + 20n}{2} \\
 & S_n & = & n\dfrac{2\,(10n + 90)}{2} \\
 & S_n & = & n\,(10n + 90) \\
\text{Donc} & S_n & = & 10n^2 + 90
\end{array}$$

2. Soit $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ la suite géométrique de premier terme $v_1 = 50$ et de raison $r = 1,05$

$$\begin{array}{rrcl}
\text{On a } \forall n \in \mathbb{N}^*, & v_n & = & v_1 \times q^{n-1} \\
\text{Donc} & v_n & = & 50 \times (1,05)^{n-1}
\end{array}$$

$$\begin{array}{rrcl}
\text{On a } \forall n \in \mathbb{N}^*, & R_n & = & v_1 \times \dfrac{1 - q^n}{1 - q} \\
 & R_n & = & 50 \times \dfrac{1 - (1,05)^n}{1 - 1,05} \\
\text{Donc} & R_n & = & -1000\,[1 - (1,05)^n]
\end{array}$$

3. On cherche S_{92}. On calcule $u_{92} = u_1 + (92-1)\,r = 100 + 91 \times 20 = 1920$

   On a donc : $92 \times \dfrac{100 + 1920}{2}$
   D'où $S_{92} = 92920$

   On cherche ensuite R_{92}.

   On a donc : $u_1 \times \dfrac{1 - q^{92}}{1 - 1,05} = 50 \times \dfrac{1 - 1,05^{92}}{1 - 1,05} \approx 88005$

   D'où $R_{92} = 88005$. On préfèrera choisir l'entreprise B.

4. On cherche $S_n \leqslant 120000$

$$\begin{array}{rcl}
10n^2 + 90n & \leqslant & 120000 \\
10n^2 + 90n - 120000 & \leqslant & 0
\end{array}$$

   On a $n_1 \approx -114,1$ et $n_2 \approx 105,1$

n	$-\infty$		n_1		0		n_2		$+\infty$
$10n^2+90n-120000$		$+$	0	$-$		$-$	0	$+$	

On sait que $n \geqslant 0$. On peut donc équiper une mur d'une hauteur compris entre 0 et 105 mètres avec une subvention de 120000 €.

On cherche $R_n \leqslant 120000$

$$\begin{array}{rcl} -1000\left[1-(1,05)^n\right] & \leq & 120000 \\ 1-(1,05)^n & \geq & -120 \\ -(1,05)^n & \geq & -121 \\ (1,05)^n & \leq & 121 \end{array}$$

On peut donc équiper un mur d'une hauteur maximale de 98 mètres. On préfèrera choisir le devis A pour les travaux.

2.2 Le mondial de football

1. On a $u_{n+1} = u_n - 4 + 0,5\,(600 - u_n)$.

   On sait que $u_1 = 400$.
   De la relation précédente, on a $u_2 = u_1 - 4 + 0,5\,(600 - u_1) = 400 - 4 + 0,5\,(600 - 400) = 496$.
   De même, $u_3 = u_2 - 4 + 0,5\,(600 - u_2) = 496 - 4 + 0,5\,(600 - 496) = 544$.
   Enfin, $u_4 = u_3 - 4 + 0,5\,(600 - u_3) = 544 - 4 + 0,5\,(600 - 544) = 568$.

2. On calcule u_{n+1}.

$$\begin{array}{rcl} \text{On a } u_{n+1} & = & u_n - 4 + \dfrac{1}{2}\,(600 - u_n) \\ & = & u_n - 4 + 300 - \dfrac{u_n}{2} \\ & = & u_n - \dfrac{u_n}{2} + 296 \\ & = & \dfrac{1}{2}u_n + 296 \end{array}$$

3. On a $v_n = u_n - 592$.

   On a donc :

$$\begin{array}{rcl} v_{n+1} & = & u_{n+1} - 592 \\ & = & \dfrac{1}{2}u_n + 296 - 592 \\ & = & \dfrac{1}{2}u_n - 296 \\ & = & \dfrac{1}{2}\left(u_n - 592\right) \\ & = & \dfrac{1}{2}v_n \end{array}$$

Ainsi (v_n) est bien une suite géométrie de raison $q = \dfrac{1}{2}$ et de premier terme $v_0 = u_0 - 592 = 400 - 592 = -192$.

4. On sait que $v_n = v_1 \times q^{n-1}$.

   D'où $v_n = 400 \times \left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}$.

   Il vient que $u_n = v_n + 592 \iff u_n = -192 \times \left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-1} + 592$.

5. On cherche le nombre de personnes qui n'ont pas regardé le septième match.

   On sait que $u_n = -192 \times \left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-1} + 592$.

   D'où $u_7 = -192 \times \left(\dfrac{1}{2}\right)^{7-1} + 592 = 589$.

   Alors, on a $600 - 589 = 11$.

   Donc 11 personnes n'ont pas regardé le match.

2.3 Sylvain va à la banque

1. On a $C_0 = 2000$.
   D'où $C_1 = 2000 \times 1,035 + 700 = 2770$.
   De plus, $C_2 = C_1 \times 1,035 + 700 = 2770 \times 1,035 + 700 = 3566,95$.
   Enfin, $C_3 = C_2 \times 1,035 + 700 = 3566,95 \times 1,035 + 700 = 4391,79$.

2. On a alors $\forall n \in \mathbb{N}, C_{n+1} = 1,035C_n + 700$.

3. On a $v_n = C_n + 20000 \iff C_n = v_n - 20000$.

   $$\begin{aligned} \text{D'où } v_{n+1} &= u_{n+1} + 20000 \\ &= (C_n \times 1,035 + 700) + 20000 \\ &= C_n \times 1,035 + 20700 \\ &= (v_n - 20000) \times 1,035 + 20700 \\ &= 1,035v_n - 20700 + 20700 \\ &= 1,035v_n \end{aligned}$$

   D'où $\forall n \in \mathbb{N}, v_{n+1} = 1,035v_n$.

   Donc (v_n) est une suite géométrique de raison $q = 1,035$ et de premier terme $v_0 = c_0 + 20000 = 2000 + 20000 = 22000$.

4. On a $v_n = v_0 \times q^n$.

   D'où $v_n = 22000 \times 1,035^n$.

   On a ainsi $C_n = v_n - 20000 \iff C_n = 22000 \times 1,035^n - 20000$.

5. L'année 2008 correspond au cas $n = 5$.

   On a $C_5 = 22000 \times 1,035^n - 20000 = 6129$.

   Donc le capital disponible le 1^er^ janvier 2008 est de 6129 euros.

6. On cherche n tel que $C_n \geqslant 10000$.

   $$\begin{aligned} C_n \geqslant 10000 &\iff 22000 \times 1,035^n - 20000 \geqslant 10000 \\ &\iff 22000 \times 1,035^n \geqslant 30000 \\ &\iff 1,035^n \geqslant \frac{15}{11} \end{aligned}$$

   À l'aide de la calculatrice, on trouve $n = 10$.

   Le capital de Sylvain aura quintuplé le 1^er^ janvier 2013.

Exemples hors-programme, pour aborder la notion de limite

3 Somme infinie de limite finie

Soit $S = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + ... + \frac{1}{2^n}$.

- Montrer que S est la somme des termes d'une suite dont on précisera la nature, le premier terme et la raison.

$S = \frac{1}{2^0} + \frac{1}{2^1} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^4} + ... + \frac{1}{2^n}$.

S est la somme des termes d'une suite géométrique $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de premier terme $u_0 = 1$ et de raison $q = \frac{1}{2}$.

D'où $u_n = u_0 \times q^n$ et $u_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n$. Les résultats concordent.

- Calculer S.

$$S = u_0 \times \frac{1 - q^{n+1}}{1-q} = \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{\frac{1}{2}} = 2\left[1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right].$$

- Déterminer $\lim\limits_{n \to +\infty} S$.

$$S = 2\left[1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right] = 2 - 2\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}.$$

On a $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} = 0$, d'où $\lim\limits_{n \to +\infty} S = 2$.

Donc S est une somme infinie de limite finie.

4 Développement périodique illimité et fraction irréductible

Soit $a = 2,7777777...$

On cherche à trouver une valeur exacte sous forme de fraction irréductible à ce développement décimal périodique illimité.

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}*}$ la suite définie par : $u_n = 0,\underbrace{777...7}_{\text{n chiffres 7}} = 7\left(\frac{1}{10} + \frac{1}{10^2} + \frac{1}{10^3} + ... + \frac{1}{10^n}\right)$.

- Calculer u_1, u_2, u_3 et u_4.

  * $u_1 = 0,7 = \frac{7}{10} = 7 \times \frac{1}{10}$

* $u_2 = 0,77 = 0,7 + 0,07 = \dfrac{7}{10} + \dfrac{7}{100} = \dfrac{7}{10} + \dfrac{7}{10^2} = 7\left(\dfrac{1}{10} + \dfrac{1}{10^2}\right)$

* $u_3 = 0,777 = 0,7+0,07+0,007 = \dfrac{7}{10}+\dfrac{7}{100}+\dfrac{7}{1000} = \dfrac{7}{10}+\dfrac{7}{10^2}+\dfrac{7}{10^3} = 7\left(\dfrac{1}{10} + \dfrac{1}{10^2} + \dfrac{1}{10^3}\right)$

* $u_4 = 0,7777 = 0,7 + 0,07 + 0,007 + 0,0007 = \dfrac{7}{10} + \dfrac{7}{100} + \dfrac{7}{1000} + \dfrac{7}{10000}$
  $= \dfrac{7}{10} + \dfrac{7}{10^2} + \dfrac{7}{10^3} + \dfrac{7}{10^4}$
  $= 7\left(\dfrac{1}{10} + \dfrac{1}{10^2} + \dfrac{1}{10^3} + \dfrac{1}{10^4}\right)$

- On pose $S_n = \dfrac{1}{10} + \dfrac{1}{10^2} + \dfrac{1}{10^3} + ... + \dfrac{1}{10^n}$.

Montrer que S_n est la somme des termes d'une suite dont on précisera la nature, le premier terme et la raison.

S_n est la somme des termes d'une suite géométrique $(v_n)_{n\,\in\,\mathbb{N}*}$ de premier terme $v_1 = \dfrac{1}{10}$ et de raison $q = \dfrac{1}{10}$.

- Calculer S_n.

$S_n = v_1 \times \dfrac{1-q^n}{1-q}$

Donc $S_n = \dfrac{1}{10} \times \dfrac{1-\left(\dfrac{1}{10}\right)^n}{1-\dfrac{1}{10}} = \dfrac{1}{9}\left[1-\left(\dfrac{1}{10}\right)^n\right]$.

Ainsi $S_n = \dfrac{1}{9}\left[1-\left(\dfrac{1}{10}\right)^n\right]$.

On sait que $u_n = 7\left(\dfrac{1}{10} + \dfrac{1}{10^2} + \dfrac{1}{10^3} + ... + \dfrac{1}{10^n}\right)$.

$$\begin{array}{lrcl} \text{Donc} & u_n & = & 7 \times S_n \\ & & = & 7 \times \dfrac{1}{9}\left[1-\left(\dfrac{1}{10}\right)^n\right] \\ & & = & \dfrac{7}{9}\left[1-\left(\dfrac{1}{10}\right)^n\right] \end{array}$$

- Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

$$\begin{array}{rcl} u_n & = & \dfrac{7}{9}\left[1-\left(\dfrac{1}{10}\right)^n\right] \\ & = & \dfrac{7}{9} - \dfrac{7}{9} \times \left(\dfrac{1}{10}\right)^n \end{array}$$

Or, $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\dfrac{1}{10}\right)^n = 0$, d'où $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \dfrac{7}{9}$.

Ainsi, on a :

$$\begin{aligned} a &= 2 + 0,77777... \\ &= 2 + \lim_{n \to +\infty} u_n \\ &= 2 + \frac{7}{9} \\ &= \frac{18+7}{9} \\ &= \frac{25}{9} \end{aligned}$$

Donc $a = \dfrac{25}{9}$.