Exercice récapitulatif sur le calcul intégral

1 Définitions et notations

On considère f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{1}{e^x+1}$, dont on fera l'étude au cours de cet exercice. On utilisera également la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = \dfrac{e^x}{e^x+1}$, et on notera F une primitive de f et G une primitive de g.

2 Questions

Le chapitre sur les intégrales est très vaste. En effet, le calcul intégral est un outil extrêmement puissant, et ne se limite pas au simple calcul de primitives.

2.1 Partie n° 1 : étude la fonction f sans connaître de primitive

- Montrer que $\displaystyle\int_0^2 f(t)\ \mathrm{d}t \geqslant 0$ et $\displaystyle\int_0^2 g(t)\ \mathrm{d}t \geqslant 0$.
- Montrer que $\displaystyle\int_0^1 g(t)\ \mathrm{d}t \geqslant \int_0^1 f(t)\ \mathrm{d}t$.
- Montrer que F est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

2.2 Partie n° 2 : détermination d'une primitive de f

On ne connaît pas, a priori, de primitive de cette fonction, et aucune formule du cours ne détermine rapidement une primitive. L'exercice conduit toujours vers la solution...

2.2.1 en vous donnant le résultat

Vérifier que la fonction $F : x \longmapsto x - \ln(e^x+1)$ est bien une primitive de f sur $\mathbb{R}$.

2.2.2 en donnant un petit indice

On admet qu'une primitive de f est de la forme $F(x) = ax - \ln(e^x+1)$, où $a \in \mathbb{R}$.

Déterminer la valeur de a pour que F soit une primitive de f.

2.2.3 en transformant l'écriture de la fonction

Montrer que $f(x) = \dfrac{e^{-x}}{1+e^{-x}}$. En déduire une primitive de f sur $\mathbb{R}$.

2.2.4 en étudiant une fonction auxiliaire

Dans cette partie, on va se servir de la fonction g définie dans la partie 1.

- Calculer $\displaystyle\int_0^x g(t)\ \mathrm{d}t$ et $\displaystyle\int_0^x f(t)+g(t)\ \mathrm{d}t$.
- En déduire $\displaystyle\int_0^x f(t)\ \mathrm{d}t$.
- En conclure, en revenant à la définition de la primitive d'une fonction, la primitive de la fonction f qui s'annule en 0.

2.2.5 Conclusion : interprétation des résultats précédents

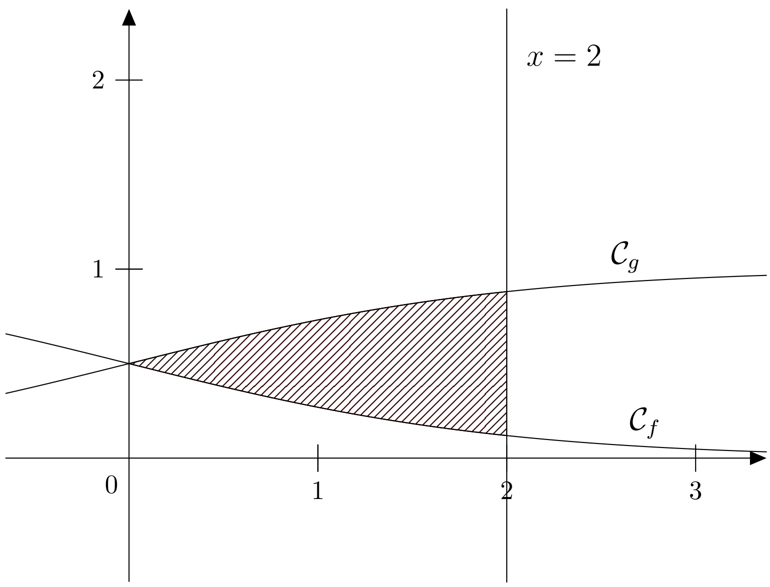
Le résultat de la 2.2.3 est très différent de celui des autres parties. Commentez.
Transformez le résultat de la partie 2.2.3 pour retrouver celui des autres parties.

Le résultat de la partie 2.2.4 est un peu différent de celui des autres parties. Expliquez pourquoi.

2.3 Partie n° 3 : autour de la fonction f

Une fois que l'on a déterminé une primitive de f, on peut s'intéresser à des aspects spécifiques du calcul intégral :

- Déterminer la valeur moyenne de la fonction f sur l'intervalle $[0,1]$.
- Calculer $\displaystyle\int_1^2 g(t)\ \mathrm{d}t$.
- On donne le graphique suivant :



Déterminer l'aire de la portion de plan hachurée (on prendra soin de préciser l'unité).