

Devoir sur table n°6 – maths expertes

Vendredi 9 février 2026 – 1h

L'utilisation d'une calculatrice est autorisée.
La qualité de la rédaction et la précision des raisonnements entreront
pour une part importante dans l'appréciation de la copie.

Exercice 1 : Étude d'une équation avec une inconnue rationnelleSoit l'équation (1) d'inconnue x :

$$78x^3 + ux^2 + vx - 14 = 0$$

où u et v sont des entiers relatifs. On cherche les solutions rationnelles de cette équation.

1. On suppose dans cette question que $\frac{14}{39}$ est solution de l'équation (1)

(a) Prouver que les entiers relatifs u et v sont liés par la relation

$$14u + 39v = 1\,129$$

- (b) Utiliser l'algorithme d'Euclide, en détaillant les diverses étapes du calcul, pour trouver un couple $(x; y)$ d'entiers relatifs vérifiant l'équation $14x + 39y = 1$.

Vérifier que le couple $(-25; 9)$ est solution de cette équation.

- (c) En déduire un couple $(u_0; v_0)$ solution particulière de l'équation

$$14u + 39v = 1\,129$$

Donner la solution générale de cette équation, c'est-à-dire l'ensemble des couples $(u; v)$ d'entiers relatifs qui la vérifient.

- (d) Déterminer, parmi les couples $(u; v)$ précédents, celui pour lequel le nombre u est l'entier naturel le plus petit possible.

2. (a) Décomposer 78 et 14 en produits de facteurs premiers.

En déduire, dans $\mathbb{N}$, l'ensemble des diviseurs de 78 et l'ensemble des diviseurs de 14.

- (b) Soit $\frac{P}{Q}$ une solution rationnelle de l'équation (1) d'inconnue x :

$$78x^3 + ux^2 + vx - 14 = 0 \quad \text{où } u \text{ et } v \text{ sont des entiers relatifs.}$$

Montrer que si P et Q sont des entiers relatifs premiers entre eux, alors P divise 14 et Q divise 78.

- (c) En déduire le nombre de rationnels, non entiers, pouvant être solutions de l'équation (1) et écrire, parmi ces rationnels, l'ensemble de ceux qui sont positifs.

Solution: Équation : $78x^3 + ux^2 + vx - 14 = 0$

1. (a) $\frac{14}{39}$ est solution de l'équation signifie :

$$78 \left(\frac{14}{39} \right)^3 + u \left(\frac{14}{39} \right)^2 + v \left(\frac{14}{39} \right) - 14 = 0$$

$$\text{i.e. } 2 \times \frac{14^3}{39^2} + u \frac{14^2}{39^2} + v \frac{14}{39} - 14 = 0$$

$$\text{i.e. } 2 \frac{14^2}{39^2} + u \frac{14}{39^2} + v \frac{1}{39} - 1 = 0$$

$$\text{i.e. } 2 \times 14^2 + 14u + 39v - 39^2 = 0$$

$$\text{i.e. } 14u + 39v = 39^2 - 2 \times 14^2$$

$$\text{i.e. } 14u + 39v = 1\,129$$

- (b) $39 = 3 \times 13$ et $14 = 2 \times 7$ sont premiers entre eux. On sait qu'il existe un couple $(x; y)$ d'entiers vérifiant $14x + 39y = 1$.

L'algorithme d'Euclide donne :

$$39 = 2 \times 14 + 11$$

$$14 = 1 \times 11 + 3$$

$$11 = 3 \times 3 + 2$$

$$3 = 1 \times 2 + 1$$

En remontant :

$$1 = 3 - 2$$

$$= 3 - (11 - 3 \times 3)$$

$$= 4 \times 3 - 11$$

$$= 4 \times (14 - 11) - 11$$

$$= 4 \times 14 - 5 \times 11$$

$$= 4 \times 14 - 5 \times (39 - 2 \times 14)$$

$$= 14 \times 14 - 5 \times 39$$

On a donc trouvé $x = 14$ et $y = -5$.

Vérification : $-25 \times 14 + 9 \times 39 = -350 + 351 = 1$. Donc le couple $(-25; 9)$ est aussi solution.

- (c) On a $-25 \times 14 + 9 \times 39 = 1$, donc :

$$-25 \times 1\,129 \times 14 + 9 \times 1\,129 \times 39 = 1\,129$$

$$\iff 14 \times (-28\,225) + 39 \times 10\,161 = 1\,129$$

Le couple $(u_0; v_0) = (-28\,225; 10\,161)$ est donc solution de l'équation

$$14u + 39v = 1\,129$$

Par différence avec $14u + 39v = 1\,129$:

$$\begin{aligned} 14(u + 28\,225) + 39(v - 10\,161) &= 0 \\ \iff 14(u + 28\,225) &= 39(10\,161 - v) \quad (1) \end{aligned}$$

Donc 14 divise $39(10\,161 - v)$ et, étant premier avec 39, 14 divise $(10\,161 - v)$.

Il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $10\,161 - v = 14k$, i.e. $v = 10\,161 - 14k$.

En reportant dans (1) :

$$\begin{aligned} 14(u + 28\,225) &= 39 \times 14k \\ \iff u + 28\,225 &= 39k \\ \iff u &= 39k - 28\,225 \end{aligned}$$

L'ensemble des couples solutions est donc $S = \{(39k - 28\,225; 10\,161 - 14k), k \in \mathbb{Z}\}$.

(d) On cherche le plus petit u naturel :

$$39k - 28\,225 = 0 \iff k = \frac{28\,225}{39} \approx 724$$

Vérification : $39 \times 724 - 28\,225 = 11$ et $39 \times 723 - 28\,225 = -28$.

On en déduit $v = 10\,161 - 14 \times 724 = 25$.

Le couple solution avec le plus petit premier terme naturel est $(11; 25)$.

2. (a) $78 = 2 \times 3 \times 13$ et $14 = 2 \times 7$.

On a $\mathcal{D}_{78} = \{1; 2; 3; 6; 13; 26; 39; 78\}$ et $\mathcal{D}_{14} = \{1; 2; 7; 14\}$.

(b) Soit $\frac{P}{Q}$ une solution rationnelle de l'équation (1) avec P et Q premiers entre eux.

$$\begin{aligned} 78 \frac{P^3}{Q^3} + u \frac{P^2}{Q^2} + v \frac{P}{Q} - 14 &= 0 \\ \iff 78P^3 + uP^2Q + vPQ^2 - 14Q^3 &= 0 \\ \iff P(78P^2 + uPQ + vQ^2) &= 14Q^3 \end{aligned}$$

Comme P divise $14Q^3$ et est premier avec Q , il divise 14.

De même :

$$14Q^3 - vPQ^2 - uP^2Q = 78P^3 \iff Q(14Q^2 - vPQ - uP^2) = 78P^3$$

Q divise $78P^3$ et, étant premier avec P , divise 78.

(c) On a $P \in \mathcal{D}_{14}$ (et leurs opposés) et $Q \in \mathcal{D}_{78}$ (et leurs opposés).

En théorie, il y a $4 \times 8 = 32$ possibilités positives, mais P et Q doivent être premiers entre eux : si P est pair, Q ne peut l'être. Il faut enlever $2 \times 4 = 8$ couples. Il faut également enlever les 4 couples avec $Q = 1$ qui donnent des solutions entières.

Il reste donc 20 couples positifs et autant de négatifs, soit 40 couples possibles.

Les 20 rationnels positifs non entiers possibles sont :

$$\frac{1}{2}; \frac{1}{3}; \frac{1}{6}; \frac{1}{13}; \frac{1}{26}; \frac{1}{39}; \frac{1}{78}; \frac{2}{3}; \frac{2}{13}; \frac{2}{39};$$

$$\frac{7}{2}; \frac{7}{3}; \frac{7}{6}; \frac{7}{13}; \frac{7}{26}; \frac{7}{39}; \frac{7}{78}; \frac{14}{3}; \frac{14}{13}; \frac{14}{39}$$

Exercice 2 : Étude d'une équation diophantienne non linéaire

Dans cette partie, on se propose d'étudier des couples $(a; b)$ d'entiers strictement positifs, tels que

$$a^2 = b^3$$

Soit $(a; b)$ un tel couple et $d = \text{PGCD}(a; b)$.

On note u et v les entiers tels que $a = du$ et $b = dv$.

1. Montrer que $u^2 = dv^3$.
2. En déduire que v divise u , et que $v = 1$.
3. Soit $(a; b)$ un couple d'entiers strictement positifs.

Démontrer que $a^2 = b^3$ si et seulement si a et b sont respectivement le cube et le carré d'un même entier.

4. **Bonus, à ne traiter que si vous avez fini le reste du devoir.**

Montrer que si n est le carré d'un nombre entier naturel et le cube d'un autre entier, alors

$$n \equiv 0[7] \text{ ou } n \equiv 1[7].$$

Tourner s'il-vous-plaît.

Solution:

1. Soit $(a; b)$ un tel couple et $d = \text{PGCD}(a; b)$. Il existe deux entiers u et v premiers entre eux tels que $a = du$ et $b = dv$.

Donc en remplaçant : $(du)^2 = (dv)^3$ soit $d^2u^2 = d^3v^3$ et comme $d \neq 0$; $u^2 = dv^3$.

2. $u^2 = dv^3$ donc v divise u^2 , soit v divise $u \times u$; d'après le théorème de Gauss, v divise $u \times u$ et v et u sont premiers entre eux, donc v divise u .

$\text{PGCD}(u; v) = 1$ or si v divise u ; $\text{PGCD}(u; v) = v$ donc $v = 1$.

3. si $a^2 = b^3$, d'après la question précédente $v = 1$ donc en remplaçant dans $b = dv$ et $u^2 = dv^3$, on obtient $b = d$ et $u^2 = d$ donc $a = du = u^3$ et $b = u^2$ donc a et b sont respectivement le cube et le carré d'un même entier.

Réciproquement :

Si a et b sont respectivement le cube et le carré d'un même entier d , alors $a = d^3$ et $b = d^2$ donc $a^2 = (d^3)^2 = d^6$ et $b^3 = (d^2)^3 = d^6$ donc $a^2 = b^3$.

Conclusion : $a^2 = b^3$ si et seulement si a et b sont respectivement le cube et le carré d'un même entier.

4. Montrer que si n est le carré d'un nombre entier naturel et le cube d'un autre entier, alors $n \equiv 0[7]$ ou $n \equiv 1[7]$.

S'il existe deux entiers a et b tels que $n = a^2 = b^3$ alors d'après la question précédente il existe un entier d tel que $a = d^3$ et $b = d^2$ donc tel que $n = d^6$.

d	0	1	2	3	4	5	6
d^6	0	1	64	729	4096	15625	46656
$d^6 \equiv \dots [7]$	0	1	1	1	1	1	1

donc $n \equiv 0[7]$ ou $n \equiv 1[7]$.

Remarque : On peut également dire :

- si $d = 0$, alors $n \equiv 0[7]$;
- si $d = 1$, alors $n \equiv 1[7]$;
- si $d > 1$ et n multiple de 7, alors $n \equiv 0[7]$;
- si $d > 1$ et d non multiple de 7, donc d premier, alors d'après le petit théorème de Fermat :

$$d^{7-1} \equiv 1[7] \text{ ou encore } d^6 = n \equiv 1[7].$$