

Devoir sur table n°6 : pour Elsa

Jeudi 19 février 2026 — 1 h 50 min

L'utilisation d'une calculatrice est autorisée.

La qualité de la rédaction et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation de la copie.

Contexte général — En hommage à ton costume de carnaval

Ce devoir est rédigé ainsi en hommage à ton costume de carnaval. En hommage à ce costume haut en couleur, toutes les questions de ce devoir se déroulent dans l'univers de Dora : ses grandes aventures en forêt tropicale, ses voyages en compagnie de son fidèle singe Babouche, ses rencontres avec Tico, Isa, et bien sûr ses démêlés avec Chipeur le renard.

Comme Dora, tu devras faire preuve de méthode, de persévérance et de rigueur pour mener à bien chaque exploration mathématique.

Let's go ! C'est parti !

Les différentes parties peuvent être traitées de façon indépendante.
Les probabilités seront données avec la précision demandée dans chaque partie.

Partie A — La roue de la carte au trésor (1,5 points)

Au début de chaque aventure, Dora fait tourner la grande roue de la Carte pour déterminer dans quelle direction elle devra explorer. L'angle de rotation θ (en radians) est choisi aléatoirement selon une loi uniforme sur l'intervalle $[1 ; 11]$.

On note Z la variable aléatoire correspondant à cet angle.

Pour chacune des questions suivantes, **entourer la bonne réponse** sans justifier.

A.1 La fonction de densité de probabilité de Z est la fonction h définie sur $[1 ; 11]$ par :

- a. $h(x) = 1$ b. $h(x) = 10$ c. $h(x) = \frac{1}{100}$ d. $h(x) = 0,1$

A.2 La probabilité que l'angle final soit inférieur ou égal à 5 radians, donc $P(Z \leq 5)$, est égale à :

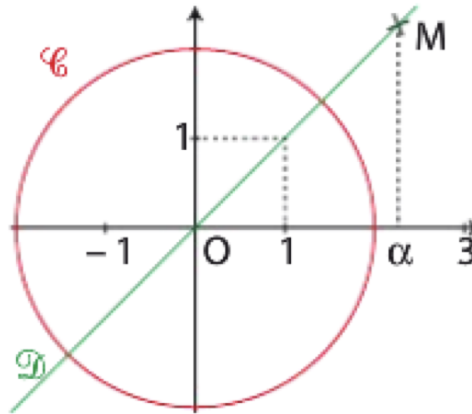
- a. 0,3 b. 0,6 c. 0,4 d. 0,2

A.3 La direction moyenne indiquée par la roue, c'est-à-dire l'espérance de Z , est égale à :

- a. 6 b. 5 c. 5,5 d. 11

Partie B — La forêt tropicale de Dora (4 points)

La forêt tropicale dans laquelle Dora évolue est représentée dans un repère orthonormé par un cercle $\mathcal{C}$ de centre O et de rayon 2, correspondant à la zone protégée. Le grand sentier principal $\mathcal{D}$ suit la droite d'équation $y = x$.



Babouche, le singe espiègle, lance une noix de coco en direction du sentier. La noix atterrit au point M de coordonnées $(X ; X)$, où X est un réel choisi aléatoirement selon une loi uniforme sur $[-1 ; 3]$.

Dans cette partie, on arrondira les résultats au millièème.

B.1 Déterminer la probabilité que la noix de coco atterrisse dans la partie positive du sentier (c'est-à-dire que le point M ait une ordonnée positive).

B.2 Déterminer la probabilité que la noix de coco atterrisse à l'intérieur de la zone protégée $\mathcal{C}$.

B.3 Calculer $E(X)$, c'est-à-dire la position moyenne de la noix de coco le long du « sentier ». Donner les coordonnées du point moyen.

B.4 On admet que la distance $D = OM = \sqrt{2}|X|$ séparant la noix de coco du centre de la forêt a pour densité la fonction f définie par :

$$f(t) = \begin{cases} \frac{t}{4} & \text{si } t \in [0 ; \sqrt{2}] \\ \frac{1}{2\sqrt{2}} & \text{si } t \in]\sqrt{2} ; 3\sqrt{2}] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

L'espérance de D est donnée par $E(D) = \int_{-\infty}^{+\infty} t f(t) dt$.

Calculer $E(D)$ et interpréter ce résultat par rapport au rayon de la zone protégée.

Partie C — Comment Dora se rend-elle à l'école ? (2,5 points)

Les probabilités seront arrondies au dix-millième.

Dora doit se rendre à l'école de la forêt chaque matin pour 8 heures. Elle part chaque jour à 7 h 40. Selon les jours, elle utilise son vélo magique ou le bus de la forêt conduit par Tico l'écureuil.

Dora prend son vélo magique 7 jours sur 10 et le bus de Tico le reste du temps. Les jours où elle prend son vélo, elle arrive à l'heure dans 99,4 % des cas. Lorsqu'elle prend le bus de Tico, elle arrive en retard dans 5 % des cas (Chipeur le renard ayant parfois semé des embûches sur le chemin).

On note V l'événement « Dora prend son vélo magique », B l'événement « Dora prend le bus de Tico » et R l'événement « Dora arrive en retard ».

C.1 Traduire la situation par un arbre de probabilités.

C.2 Déterminer la probabilité de l'événement $V \cap R$.

C.3 Démontrer que la probabilité de l'événement R est 0,0192.

C.4 Un certain matin, Dora est arrivée en retard à l'école. Quelle est la probabilité qu'elle soit venue en bus avec Tico ?

Partie D — Les temps de trajet de Dora (4 points)**Sous-partie D.1 — À vélo magique**

Lorsque Dora utilise son vélo magique, le temps de parcours T (en minutes) suit la loi normale d'espérance $\mu = 17$ et d'écart-type $\sigma = 1,2$.

D.1.a Déterminer la probabilité que Dora mette entre 15 et 20 minutes pour se rendre à l'école.

D.1.b Dora part à 7 h 40 avec son vélo magique. Quelle est la probabilité qu'elle soit en retard à l'école ?

D.1.c Avant quelle heure Dora doit-elle partir pour arriver à l'heure avec une probabilité de 0,9 ? Arrondir le résultat à la minute près.

Sous-partie D.2 — Dans le bus de Tico

Lorsque Dora prend le bus de Tico, le temps de parcours T' (en minutes) suit la loi normale d'espérance $\mu' = 15$ et d'écart-type σ' inconnu.

On sait que la probabilité que Dora mette plus de 20 minutes en bus est de 0,05 (Chipeur étant passé par là).

$$\text{On note } Z' = \frac{T' - 15}{\sigma'}.$$

D.2.a Quelle loi la variable aléatoire Z' suit-elle ?

D.2.b Déterminer une valeur approchée à 0,01 près de l'écart-type σ' de T' .

Tourne, s'il-te-plaît.

Partie E — Les explorations de Dora (8 points)

Dora organise de grandes expéditions à travers la forêt tropicale. En chemin, les explorateurs peuvent être arrêtés par divers obstacles : des rivières à traverser, des ponts effondrés, des pièges tendus par Chipeur, des lianes bloquant le passage, etc.

Une expédition part du village. On note D la variable aléatoire mesurant la distance en kilomètres parcourue avant le premier obstacle rencontré.

On admet que D suit la loi exponentielle de paramètre $\lambda = \frac{1}{82}$.

Dans toute cette partie, on donnera d'abord la valeur exacte, puis un résultat arrondi au millième.

E.1 Calculer la probabilité que la distance parcourue sans obstacle soit :

- a. comprise entre 50 et 100 km ;
- b. supérieure à 300 km.

E.2 Dora apprend qu'une expédition a déjà parcouru 350 km sans rencontrer d'obstacle. Quelle est la probabilité qu'elle n'en rencontre aucun au cours des 25 prochains kilomètres ?

E.3 Distance moyenne parcourue sans obstacle.

- a. Au moyen d'une intégration par parties, calculer $I(A) = \int_0^A \frac{1}{82} x e^{-\frac{x}{82}} dx$ où A est un réel positif.
- b. En déduire la distance moyenne parcourue sans obstacle.

E.4 Dora organise N_0 expéditions simultanées. Les distances parcourues avant obstacle sont des variables aléatoires deux à deux indépendantes suivant toutes la même loi exponentielle de paramètre $\lambda = \frac{1}{82}$.

On note X_d la variable aléatoire égale au nombre d'expéditions n'ayant rencontré aucun obstacle après avoir parcouru d kilomètres.

- a. Justifier que X_d suit une loi binomiale dont on précisera les paramètres.
- b. Donner le nombre moyen d'expéditions arrivant sans obstacle après d kilomètres.

E.5 Pour le grand rassemblement annuel de la forêt tropicale, il y a $N_0 = 150$ expéditions devant parcourir $d = 100$ km. On pose $e^{-\frac{100}{82}} \approx 0,294$ et on rappelle que X_{100} suit la loi $\mathcal{B}(150; 0,294)$. Justifier que l'on peut approcher X_{100} par une loi normale et préciser ses paramètres. On pourra utiliser un théorème du cours.



You did it ! Tu l'as fait !