
Correction — Devoir sur table n°6Vendredi 20 février 2026

Partie A — La roue des surprises (1,5 points)

Pour ouvrir le festival, Barbapapa fait tourner une grande roue colorée. L'angle de rotation final θ (en radians) est choisi aléatoirement et suit une loi uniforme sur l'intervalle $[1 ; 11]$.

On note Z la variable aléatoire correspondant à cet angle.

A.1 — Réponse (d).

La densité d'une loi uniforme sur $[a ; b]$ est la fonction constante égale à $\frac{1}{b-a}$. Ici, $b-a = 11-1 = 10$, donc $h(x) = \frac{1}{10} = 0,1$.

A.2 — Réponse (c).

Pour une loi uniforme sur $[1 ; 11]$, on a :

$$P(Z \leq 5) = \frac{5-1}{11-1} = \frac{4}{10} = 0,4.$$

A.3 — Réponse (a).

L'espérance d'une loi uniforme sur $[a ; b]$ est $\frac{a+b}{2}$. Donc :

$$E(Z) = \frac{1+11}{2} = 6.$$

Partie B — Le jardin circulaire de Barbapapa (4 points)

B.1

Le point M a une ordonnée positive si et seulement si $X > 0$. Or X suit une loi uniforme sur $[-1; 3]$, d'où :

$$P(X > 0) = \frac{3 - 0}{3 - (-1)} = \frac{3}{4} = 0,750.$$

La probabilité que le caillou atterrisse dans la moitié positive de l'allée est **0,750**.

B.2

Le point $M = (X; X)$ est à l'intérieur du cercle $\mathcal{C}$ si et seulement si $OM \leq 2$, c'est-à-dire :

$$\sqrt{X^2 + X^2} \leq 2 \iff \sqrt{2}|X| \leq 2 \iff |X| \leq \sqrt{2}.$$

L'événement $\{|X| \leq \sqrt{2}\}$ correspond à $\{-\sqrt{2} \leq X \leq \sqrt{2}\}$. Comme $-\sqrt{2} \approx -1,414 < -1$, l'intersection avec le support $[-1; 3]$ de X est $[-1; \sqrt{2}]$. Donc :

$$P(M \in \mathcal{C}) = P(-1 \leq X \leq \sqrt{2}) = \frac{\sqrt{2} - (-1)}{4} = \frac{1 + \sqrt{2}}{4} \approx \frac{2,414}{4} \approx 0,604.$$

La probabilité que le caillou atterrisse à l'intérieur du jardin est **0,604**.

B.3

L'espérance d'une loi uniforme sur $[-1; 3]$ est : $E(X) = \frac{-1+3}{2} = 1$. Le point moyen est donc le point de coordonnées **(1; 1)**.

B.4

On calcule :

$$E(D) = \int_0^{+\infty} t f(t) dt = \int_0^{\sqrt{2}} t \cdot \frac{t}{4} dt + \int_{\sqrt{2}}^{3\sqrt{2}} t \cdot \frac{1}{2\sqrt{2}} dt.$$

Première intégrale :

$$\int_0^{\sqrt{2}} \frac{t^2}{4} dt = \left[\frac{t^3}{12} \right]_0^{\sqrt{2}} = \frac{(\sqrt{2})^3}{12} = \frac{2\sqrt{2}}{12} = \frac{\sqrt{2}}{6}.$$

Deuxième intégrale :

$$\int_{\sqrt{2}}^{3\sqrt{2}} \frac{t}{2\sqrt{2}} dt = \frac{1}{2\sqrt{2}} \left[\frac{t^2}{2} \right]_{\sqrt{2}}^{3\sqrt{2}} = \frac{1}{2\sqrt{2}} \cdot \frac{18 - 2}{2} = \frac{16}{4\sqrt{2}} = \frac{4}{\sqrt{2}} = 2\sqrt{2}.$$

D'où :

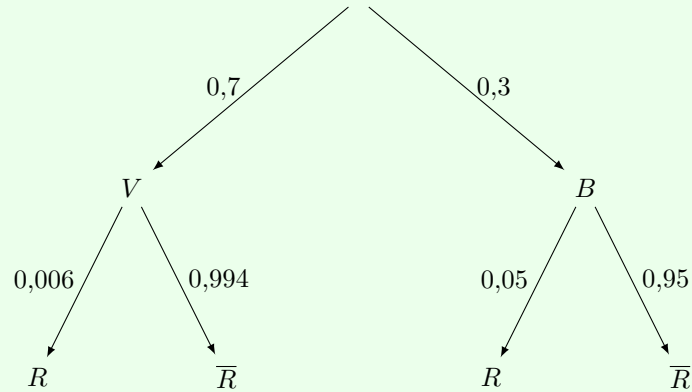
$$E(D) = \frac{\sqrt{2}}{6} + 2\sqrt{2} = \sqrt{2} \left(\frac{1}{6} + 2 \right) = \frac{13\sqrt{2}}{6} \approx 3,064.$$

La distance moyenne du caillou au centre du jardin est $\frac{13\sqrt{2}}{6} \approx 3,064$ km, ce qui est supérieur au rayon du jardin (qui vaut 2 km). En moyenne, le caillou atterrit donc **en dehors du jardin circulaire**.

Partie C — Comment les Barbapapas arrivent-ils au festival ? (2,5 points)

On note V : « le membre prend la Barbavoiture », B : « le membre prend le Barbabus » et R : « le membre arrive en retard ».

On a $P(V) = 0,7$, $P(B) = 0,3$, $P(R | V) = 0,006$ et $P(R | B) = 0,05$.

C.1 — Arbre de probabilités**C.2**

D'après la formule des probabilités composées :

$$P(V \cap R) = P(V) \times P(R | V) = 0,7 \times 0,006 = 0,0042.$$

C.3

Les événements V et B forment une partition de l'univers. D'après la formule des probabilités totales :

$$P(R) = P(V \cap R) + P(B \cap R) = P(V) \times P(R | V) + P(B) \times P(R | B).$$

Or $P(B \cap R) = 0,3 \times 0,05 = 0,015$. Donc :

$$P(R) = 0,0042 + 0,015 = 0,0192. \quad \square$$

C.4

On cherche $P(B | R)$. D'après la formule de Bayes :

$$P(B | R) = \frac{P(B \cap R)}{P(R)} = \frac{0,015}{0,0192} \approx 0,7813.$$

Sachant qu'un membre est arrivé en retard, la probabilité qu'il soit venu en Barbabus est d'environ **0,7813**.

Partie D — Temps de trajet des Barbapapas (4 points)

D.1 Le temps de parcours en Barbavoiture T suit une loi normale $\mathcal{N}(17; 1,2^2)$.

D.2 Le temps de parcours en Barbabus T' suit une loi normale $\mathcal{N}(15; \sigma'^2)$ avec σ' inconnu, et $P(T' > 20) = 0,05$.

D.1.a

On pose $Z = \frac{T - 17}{1,2}$, qui suit la loi $\mathcal{N}(0; 1)$. Alors :

$$P(15 \leq T \leq 20) = P\left(\frac{15 - 17}{1,2} \leq Z \leq \frac{20 - 17}{1,2}\right) = P\left(-\frac{5}{3} \leq Z \leq 2,5\right).$$

D'après la table de la loi normale centrée réduite :

$$P(15 \leq T \leq 20) = \Phi(2,5) - \Phi\left(-\frac{5}{3}\right) = \Phi(2,5) - (1 - \Phi(1,667)) \approx 0,9938 - (1 - 0,9525) = 0,9463.$$

D.1.b

Le membre part à 7 h 40 et doit arriver à 8 h 00, soit en 20 minutes. Il arrive en retard si $T > 20$, donc :

$$P(T > 20) = P\left(Z > \frac{20 - 17}{1,2}\right) = P(Z > 2,5) = 1 - \Phi(2,5) \approx 1 - 0,9938 = 0,006.$$

La probabilité qu'il soit en retard est **0,006**.

D.1.c

Supposons que le membre parte h minutes avant 8 h 00. Il est à l'heure si $T \leq h$, et on veut $P(T \leq h) = 0,9$. Cela revient à trouver le quantile d'ordre 0,9 de la loi $\mathcal{N}(17; 1,2^2)$:

$$\Phi\left(\frac{h - 17}{1,2}\right) = 0,9 \implies \frac{h - 17}{1,2} = 1,28 \implies h = 17 + 1,2 \times 1,28 = 18,536 \approx 19 \text{ min.}$$

Il doit partir au moins 19 minutes avant 8 h 00, soit avant **7 h 41**.

D.2.a

Par définition, $Z' = \frac{T' - 15}{\sigma'}$ est la variable centrée réduite associée à T' . Comme T' suit une loi normale, Z' suit la **loi normale centrée réduite** $\mathcal{N}(0; 1)$.

D.2.b

On sait que $P(T' > 20) = 0,05$. Or :

$$P(T' > 20) = P\left(Z' > \frac{20 - 15}{\sigma'}\right) = 1 - \Phi\left(\frac{5}{\sigma'}\right) = 0,05 \implies \Phi\left(\frac{5}{\sigma'}\right) = 0,95.$$

D'après la table, $\Phi(1,645) \approx 0,95$, donc :

$$\frac{5}{\sigma'} = 1,645 \implies \sigma' = \frac{5}{1,645} \approx 3,04.$$

L'écart-type est approximativement $\sigma' \approx \mathbf{3,04}$ minutes.

Partie E — Le réseau de Barbabus (8 points)

La variable aléatoire D suit la loi exponentielle de paramètre $\lambda = \frac{1}{82}$. Pour tout réel $d \geq 0$: $P(D > d) = e^{-d/82}$.

E.1

a. Distance comprise entre 50 et 100 km :

$$P(50 \leq D \leq 100) = \left[-e^{-x/82} \right]_{50}^{100} = e^{-50/82} - e^{-100/82} = e^{-25/41} - e^{-50/41} \approx 0,543 - 0,295 \approx 0,248.$$

b. Distance supérieure à 300 km :

$$P(D > 300) = e^{-300/82} = e^{-150/41} \approx 0,026.$$

E.2

La loi exponentielle est **sans mémoire** : pour tous $s, t \geq 0$, $P(D > s + t \mid D > s) = P(D > t)$. Donc, sachant que le Barbabus a déjà parcouru 350 km sans incident :

$$P(D > 375 \mid D > 350) = P(D > 25) = e^{-25/82} \approx 0,738.$$

E.3

a. On intègre par parties en posant $u = x$ et $v' = \frac{1}{82}e^{-x/82}$, ce qui donne $u' = 1$ et $v = -e^{-x/82}$. Donc :

$$\begin{aligned} I(A) &= \left[-x e^{-x/82} \right]_0^A + \int_0^A e^{-x/82} dx \\ &= -A e^{-A/82} + \left[-82 e^{-x/82} \right]_0^A \\ &= -A e^{-A/82} - 82 e^{-A/82} + 82 \\ &= 82 - (A + 82) e^{-A/82}. \end{aligned}$$

b. On calcule $E(D) = \lim_{A \rightarrow +\infty} I(A)$. Quand $A \rightarrow +\infty$, on a $e^{-A/82} \rightarrow 0$ et, par croissances comparées, $A e^{-A/82} \rightarrow 0$. Donc $(A + 82) e^{-A/82} \rightarrow 0$, et :

$$E(D) = \lim_{A \rightarrow +\infty} I(A) = 82.$$

La distance moyenne parcourue sans incident est de **82** kilomètres (ce qui est cohérent avec la formule générale $E(D) = \frac{1}{\lambda} = 82$).

E.4

- a. On dispose de N_0 Barbabus dont les distances avant incident sont indépendantes et suivent toutes la même loi exponentielle de paramètre $\frac{1}{82}$. Pour chaque Barbabus, on définit un succès comme « ne subir aucun incident avant d km », avec la probabilité :

$$p = P(D > d) = e^{-d/82}.$$

Les N_0 épreuves sont indépendantes et de même probabilité de succès p , donc X_d suit une loi binomiale :

$$X_d \sim \mathcal{B}(N_0; e^{-d/82}).$$

- b. L'espérance d'une loi binomiale $\mathcal{B}(n; p)$ vaut $n \times p$, donc :

$$E(X_d) = N_0 \times e^{-d/82}.$$

E.5

On a $X_{100} \sim \mathcal{B}(150; 0,294)$, avec $n = 150$, $p = 0,294$ et $q = 1 - 0,294 = 0,706$.

On vérifie les conditions d'application du théorème central limite :

- $n = 150 \geq 30$;
- $np = 150 \times 0,294 = 44,1 \geq 5$;
- $nq = 150 \times 0,706 = 105,9 \geq 5$.

Les trois conditions sont satisfaites, donc on peut approcher X_{100} par une loi normale de mêmes espérance et variance que X_{100} :

$$E(X_{100}) = np = 44,1 \quad \text{et} \quad V(X_{100}) = npq = 150 \times 0,294 \times 0,706 \approx 31,13.$$

Ainsi, X_{100} peut être approché par la loi $\mathcal{N}(44,1; 31,13)$, d'écart-type $\sqrt{31,13} \approx 5,58$.

●

Fin de la correction