

Devoir sur table n°6

Jeudi 26 février 2026 – 1 h 50 min

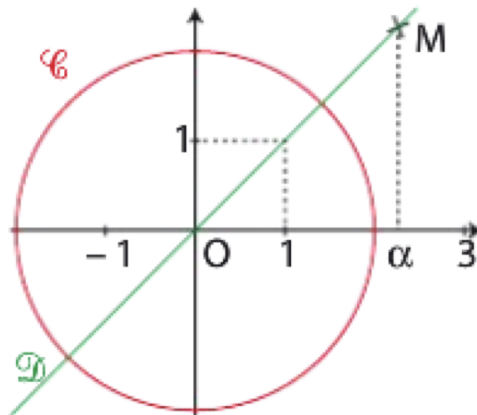
L'utilisation d'une calculatrice est autorisée.

La qualité de la rédaction et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation de la copie.

Exercice 1 : Probabilités et géométrie

(4 points)

Le plan est muni d'un repère orthonormé. $\mathcal{C}$ est le cercle de centre O et de rayon 2, et $\mathcal{D}$ la droite d'équation $y = x$.



On choisit un réel α au hasard dans l'intervalle $[-1; 3]$ selon une loi uniforme. On note X la variable aléatoire correspondant à ce choix, et M le point de la droite $\mathcal{D}$ d'abscisse X , de sorte que M a pour coordonnées $(X; X)$.

- Déterminer la probabilité que le point M ait une ordonnée positive.
- Déterminer la probabilité que le point M soit situé à l'intérieur du cercle $\mathcal{C}$.
- Calculer $E(X)$.
- On admet que la variable aléatoire $D = OM = \sqrt{2}|X|$ a pour densité la fonction f définie par :

$$f(t) = \begin{cases} \frac{t}{4} & \text{si } t \in [0; \sqrt{2}] \\ \frac{1}{2\sqrt{2}} & \text{si } t \in]\sqrt{2}; 3\sqrt{2}] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

L'espérance de D est donnée par :

$$E(D) = \int_{-\infty}^{+\infty} t f(t) dt$$

Calculer $E(D)$ et interpréter ce résultat par rapport au rayon du cercle $\mathcal{C}$.

Solution: X suit une loi uniforme sur $[-1; 3]$.

Donc pour tout intervalle $[a; b] \subset [-1; 3]$:

$$P(a \leq X \leq b) = \frac{b - a}{3 - (-1)} = \frac{b - a}{4}$$

a) Le point M a pour coordonnées $(X; X)$, donc son ordonnée est X . On cherche $P(X > 0)$.

$$P(X > 0) = P(0 < X \leq 3) = \frac{3 - 0}{4} = \frac{3}{4}$$

La probabilité que le point M ait une ordonnée positive est $\frac{3}{4}$.

b) Le point $M(X; X)$ est à l'intérieur du cercle $\mathcal{C}$ de centre O et de rayon 2 si et seulement si $OM < 2$, c'est-à-dire :

$$OM = \sqrt{X^2 + X^2} = \sqrt{2}|X| < 2 \iff |X| < \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$$

On cherche donc $P(-\sqrt{2} < X < \sqrt{2})$.

Puisque $-\sqrt{2} \approx -1,41 < -1$ et $\sqrt{2} \approx 1,41$, la contrainte $X \geq -1$ est plus restrictive que $X > -\sqrt{2}$, donc :

$$P(-\sqrt{2} < X < \sqrt{2}) = P(-1 \leq X < \sqrt{2}) = \frac{\sqrt{2} - (-1)}{4} = \frac{\sqrt{2} + 1}{4}$$

La probabilité que M soit à l'intérieur de $\mathcal{C}$ est $\frac{\sqrt{2} + 1}{4} \approx 0,60$.

Exercice 2 : Une entreprise d'autocars**(8 points)**

Une entreprise d'autocars dessert une région montagneuse. En chemin, les véhicules peuvent être bloqués par des incidents extérieurs comme des chutes de pierres, la présence de troupeaux sur la route, etc. Un autocar part de son dépôt. On note D la variable aléatoire qui mesure la distance en kilomètres que l'autocar va parcourir jusqu'à ce qu'il survienne un incident. On admet que D suit une loi exponentielle de paramètre $\lambda = \frac{1}{82}$.

Dans tout l'exercice, on donnera d'abord la valeur exacte, plus un résultat arrondi au millièm.

1. Calculer la probabilité que la distance parcourue sans incident soit :
 - a. comprise entre 50 et 100 km ;
 - b. supérieure à 300 km.
2. Sachant que l'autocar a déjà parcouru 350 kilomètres sans incident, quelle est la probabilité qu'il n'en subisse pas plus au cours des 25 prochains kilomètres ?
3. Détermination de la distance moyenne parcourue sans incident.
 - a. Au moyen d'une intégration par parties, calculer $I(A) = \int_0^A \frac{1}{82} x e^{-\frac{x}{82}} dx$ où A est un nombre réel positif.
 - b. En déduire la distance moyenne cherchée.
4. L'entreprise possède N_0 autocars. Les distances parcourues par chacun des autocars entre l'atelier et le lieu où survient un incident sont des variables aléatoires deux à deux indépendantes et de même loi exponentielle de paramètre $\lambda = \frac{1}{82}$.
 d étant un réel positif, on note X_d la variable aléatoire égale au nombre d'autocars n'ayant subi aucun incident après avoir parcouru d kilomètres.
 - a. Quelle est la loi de X_d ? Justifier, en précisant également ses paramètres.
 - b. Donner le nombre moyen d'autocars n'ayant subi aucun incident après avoir parcouru d kilomètres.
5. L'entreprise souhaite estimer le nombre d'autocars arrivant sans incident à une ville située à $d = 100$ km du dépôt. On suppose $N_0 = 150$ autocars. On arrondit $e^{-\frac{100}{82}} \approx 0,294$ et on affirme que X_{100} suit la loi $\mathcal{B}(150; 0,294)$
 - a. Justifier que l'on peut approcher X_{100} par une loi normale et préciser ses paramètres.
 - b. En déduire un intervalle $[a; b]$, symétrique autour de la moyenne, dans lequel le nombre d'autocars arrivant sans incident se situe avec une probabilité d'environ 95 %.

Solution:

La variable aléatoire D suit une loi exponentielle de paramètre $\lambda = \frac{1}{82}$.

1. a. La probabilité que la distance parcourue sans incident soit comprise entre 50

et 100 km est :

$$\begin{aligned}
 P(50 \leq D \leq 100) &= P(D \leq 100) - P(D \leq 50) \\
 &= \int_0^{100} \frac{1}{82} e^{-\frac{x}{82}} dx - \int_0^{50} \frac{1}{82} e^{-\frac{x}{82}} dx \\
 &= \left[-e^{-\frac{x}{82}} \right]_0^{100} - \left[-e^{-\frac{x}{82}} \right]_0^{50} \\
 &= \left(-e^{-\frac{100}{82}} + 1 \right) - \left(-e^{-\frac{50}{82}} + 1 \right) \\
 &= -e^{-\frac{100}{82}} + e^{-\frac{50}{82}} \\
 &= e^{-\frac{50}{82}} - e^{-\frac{100}{82}} \\
 &\approx 0,542 - 0,294 \\
 &\approx 0,248
 \end{aligned}$$

b. La probabilité que la distance parcourue sans incident soit supérieure à 300 km est :

$$\begin{aligned}
 P(D > 300) &= 1 - P(D \leq 300) \\
 &= 1 - \int_0^{300} \frac{1}{82} e^{-\frac{x}{82}} dx \\
 &= 1 - \left[-e^{-\frac{x}{82}} \right]_0^{300} \\
 &= 1 - \left(-e^{-\frac{300}{82}} + 1 \right) \\
 &= e^{-\frac{300}{82}} \\
 &\approx 0,023
 \end{aligned}$$

2. On cherche $P_{D>350}(D > 375)$.

Par la propriété de durée de vie sans vieillissement de la loi exponentielle :

$$\begin{aligned}
 P_{D>350}(D > 375) &= P(D > 25) \\
 &= 1 - P(D \leq 25) \\
 &= 1 - \left(1 - e^{-\frac{25}{82}} \right) \\
 &= e^{-\frac{25}{82}} \\
 &\approx 0,736
 \end{aligned}$$

3. **a.** On calcule $I(A) = \int_0^A \frac{1}{82} x e^{-\frac{x}{82}} dx$ par intégration par parties.

Posons :

$$\begin{aligned}
 u(x) &= x & v'(x) &= \frac{1}{82} e^{-\frac{x}{82}} \\
 u'(x) &= 1 & v(x) &= -e^{-\frac{x}{82}}
 \end{aligned}$$

u et v sont dérivables sur $[0; A]$, de dérivée continue sur $[0; A]$. Ainsi :

$$\begin{aligned} I(A) &= \left[x \times \left(-e^{-\frac{x}{82}} \right) \right]_0^A - \int_0^A 1 \times \left(-e^{-\frac{x}{82}} \right) dx \\ &= \left[-xe^{-\frac{x}{82}} \right]_0^A + \int_0^A e^{-\frac{x}{82}} dx \\ &= -Ae^{-\frac{A}{82}} - 0 + \left[-82e^{-\frac{x}{82}} \right]_0^A \\ &= -Ae^{-\frac{A}{82}} - 82e^{-\frac{A}{82}} + 82 \\ &= -Ae^{-\frac{A}{82}} - 82e^{-\frac{A}{82}} + 82 \end{aligned}$$

b. Calculons $\lim_{A \rightarrow +\infty} I(A)$.

- $\lim_{A \rightarrow +\infty} e^{-\frac{A}{82}} = 0$
- $\lim_{A \rightarrow +\infty} Ae^{-\frac{A}{82}} = 0$ (par croissance comparée)

Donc, par somme :

$$\lim_{A \rightarrow +\infty} I(A) = 0 - 0 + 82 = 82$$

La distance moyenne parcourue sans incident est de 82 km.

4. a. Pour chaque autocar, la probabilité qu'il n'ait subi aucun incident après avoir parcouru d kilomètres est :

$$P(D > d) = e^{-\lambda d}$$

On a N_0 autocars indépendants, chacun ayant la probabilité $e^{-\lambda d}$ de ne pas avoir d'incident.

Donc X_d suit une loi binomiale de paramètres N_0 et $e^{-\lambda d}$: $X_d \sim \mathcal{B}(N_0, e^{-\lambda d})$.

b. Le nombre moyen d'autocars n'ayant subi aucun incident après avoir parcouru d kilomètres est l'espérance de X_d :

$$E(X_d) = N_0 \times e^{-\lambda d} = N_0 e^{-\frac{d}{82}}$$

5. a. On vérifie les conditions d'application du théorème de Moivre-Laplace :

- $N_0 = 150$ est suffisamment grand ;
- $- N_0 p = 150 \times 0,294 = 44,1 \geq 5$;
- $- N_0(1 - p) = 150 \times 0,706 = 105,9 \geq 5$.

Les conditions sont réunies. D'après le théorème de Moivre-Laplace, X_{100} peut être approchée par la loi normale $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ avec :

$$\mu = N_0 p = 44,1 \quad \sigma = \sqrt{N_0 p(1 - p)} = \sqrt{150 \times 0,294 \times 0,706} \approx 5,581$$

b. On sait que pour une variable aléatoire suivant une loi normale, la probabilité d'être dans l'intervalle $[\mu - 1,96\sigma; \mu + 1,96\sigma]$ est d'environ 95 %. On calcule :

$$a = \mu - 1,96\sigma = 44,1 - 1,96 \times 5,581 \approx 33,2$$

$$b = \mu + 1,96\sigma = 44,1 + 1,96 \times 5,581 \approx 55,0$$

Ainsi, avec une probabilité d'environ 95 %, le nombre d'autocars arrivant sans incident à destination est compris entre **33 et 55**.

Exercice 3 : Comment se rendre au lycée...**(8 points)**

*Les trois parties A, B et C peuvent être traitées de façon indépendante.
Les probabilités seront arrondies au dix millième.*

Un élève doit se rendre à son lycée chaque matin pour 8 h 00. Pour cela, il utilise, selon les jours, deux moyens de transport : le vélo ou le bus.

Partie A

L'élève part tous les jours à 7 h 40 de son domicile et doit arriver à 8 h 00 à son lycée. Il prend le vélo 7 jours sur 10 et le bus le reste du temps.

Les jours où il prend le vélo, il arrive à l'heure dans 99,4 % des cas et lorsqu'il prend le bus, il arrive en retard dans 5 % des cas.

On choisit une date au hasard en période scolaire et on note V l'évènement « L'élève se rend au lycée à vélo », B l'évènement « l'élève se rend au lycée en bus » et R l'évènement « L'élève arrive en retard au lycée ».

1. Traduire la situation par un arbre de probabilités.
2. Déterminer la probabilité de l'évènement $V \cap R$.
3. Démontrer que la probabilité de l'évènement R est 0,019 2
4. Un jour donné, l'élève est arrivé en retard au lycée. Quelle est la probabilité qu'il s'y soit rendu en bus?

Partie B : le vélo

On suppose dans cette partie que l'élève utilise le vélo pour se rendre à son lycée.

Lorsqu'il utilise le vélo, on modélise son temps de parcours, exprimé en minutes, entre son domicile et son lycée par une variable aléatoire T qui suit la loi normale d'espérance $\mu = 17$ et d'écart-type $\sigma = 1,2$.

1. Déterminer la probabilité que l'élève mette entre 15 et 20 minutes pour se rendre à son lycée.
2. Il part de son domicile à vélo à 7 h 40. Quelle est la probabilité qu'il soit en retard au lycée?
3. L'élève part à vélo. Avant quelle heure doit-il partir pour arriver à l'heure au lycée avec une probabilité de 0,9 ? Arrondir le résultat à la minute près.

Partie C : le bus

Lorsque l'élève utilise le bus, on modélise son temps de parcours, exprimé en minutes, entre son domicile et son lycée par une variable aléatoire T' qui suit la loi normale d'espérance $\mu' = 15$ et d'écart-type σ' .

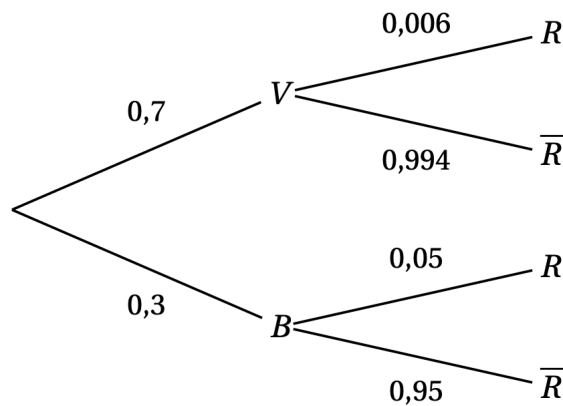
On sait que la probabilité qu'il mette plus de 20 minutes pour se rendre à son lycée en bus est de 0,05.

On note Z' la variable aléatoire égale à $\frac{T' - 15}{\sigma'}$

1. Quelle loi la variable aléatoire Z' suit-elle ?
2. Déterminer une valeur approchée à 0,01 près de l'écart-type σ' de T' .

Solution:**Partie A**

1.

2. D'après l'arbre ci-dessus $P(V \cap R) = 0,7 \times 0,006 = 0,0042$.

3. D'après l'arbre ci-dessus, la probabilité de l'évènement R est

$$P(R) = P(V \cap R) + P(B \cap R) = 0,0042 + 0,3 \times 0,05 = 0,0192$$

4. On cherche à déterminer $P_R(B)$:

$$P_R(B) = \frac{P(B \cap R)}{P(R)} = \frac{0,3 \times 0,05}{0,0192} = 0,78125$$

Partie B : le vélo1. Cela revient à calculer $P(15 \leq T \leq 20)$. À la calculatrice, nous obtenons,

$$P(15 \leq T \leq 20) = 0,946$$

2. Il sera en retard au lycée si il met plus de 20 minutes pour effectuer le trajet. On cherche donc la probabilité de l'évènement « $T \geq 20$ ». À la calculatrice, nous obtenons

$$P(T \geq 20) = 0,0062$$

3. On cherche la durée maximale de son temps de parcours T_0 (en minutes) tel que $P(T \leq T_0) = 0,9$. À la calculatrice, nous obtenons

$$P(T \leq 18,5379) = 0,9$$

Ce qui signifie qu'il a une probabilité de 0,9 de mettre moins de 18 minutes et 30 secondes (environ). Il peut donc partir au plus tard à 8 heures moins 18 minutes

et 30 secondes, soit à 7 h 41 minutes et 30 secondes. À une minute près, il peut partir au maximum à 7 h 41, de sorte à avoir une probabilité d'arriver à l'heure de 0,9.

Partie C: le bus

1. D'après le cours Z' suit une loi normale centrée-réduite.
2. Puisque $P(T' \geq 20) = 0,05$, il vient

$$P\left(\frac{T' - 15}{\sigma'} \geq \frac{20 - 15}{\sigma'}\right) = 0,05 \iff P\left(Z' \geq \frac{5}{\sigma'}\right) = 0,05$$

À la calculatrice, en considérant une loi normale centrée-réduite Z' , on trouve que

$$P\left(Z' \geq 1,6449\right) = 0,05$$

D'où

$$\frac{5}{\sigma'} = 1,6449$$

et donc

$$\sigma' = \frac{5}{1,6449} = 3,04 \quad \text{à} \quad 0,01 \quad \text{près}$$