

Devoir sur table n°5

Jeudi 29 janvier 2026 – 1 h 50 min

L'utilisation d'une calculatrice est autorisée.

La qualité de la rédaction et la précision des raisonnements entreront
pour une part importante dans l'appréciation de la copie.

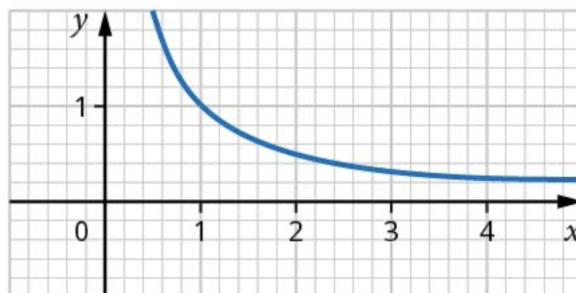
Exercice 1 : Questionnaire à choix multiples

(2 points)

Pour chacune des questions suivantes, entourer la bonne réponse sur le sujet, sans justification.

1. Soit f la fonction définie sur l'intervalle $]0; +\infty[$ par $f(x) = \frac{1}{x}$.

Une partie de sa courbe représentative, dans un repère orthonormé, est donnée ci-dessous.



Le domaine du plan défini comme l'ensemble des points M de coordonnées $(x; y)$ qui vérifient $1 \leq x \leq 2$ et $\frac{1}{x} \leq y \leq 1$ a pour aire (exprimée en unités d'aire) :

- a. $\ln 2$ b. $\frac{1}{2}$ c. $1 - \ln 2$ d. $1 - e^2$

2. Soit f la fonction définie, pour tout réel t positif, par $f(t) = 8e^{-0,12t} + 11$.

La valeur moyenne de f arrondie à 10^{-1} sur l'intervalle $[0; 24]$ est :

- a. 15,2 b. 13,6 c. 16,7 d. 11,2

3. L'intégrale $\int_1^{\ln 2} e^{-x} dx$ est égale à :

- a. $\ln 2 - 1$ b. $\frac{1-e}{e}$ c. $\frac{2-e}{2e}$ d. $1 - \ln 2$

Solution:

1. L'aire du domaine défini par $1 \leq x \leq 2$ et $\frac{1}{x} \leq y \leq 1$ est :

$$\mathcal{A} = \int_1^2 \left(1 - \frac{1}{x}\right) dx$$

La fonction $x \mapsto 1 - \frac{1}{x}$ est continue sur $[1; 2]$, donc

$$\begin{aligned}\mathcal{A} &= \int_1^2 1 \, dx - \int_1^2 \frac{1}{x} \, dx \\ &= [x]_1^2 - [\ln x]_1^2 \\ &= (2 - 1) - (\ln 2 - \ln 1) \\ &= 1 - \ln 2 - 0 \\ &= 1 - \ln 2\end{aligned}$$

Réponse : c. $1 - \ln 2$

2. La valeur moyenne de f sur $[0; 24]$ est :

$$m = \frac{1}{24 - 0} \int_0^{24} (8e^{-0,12t} + 11) \, dt$$

La fonction $t \mapsto 8e^{-0,12t} + 11$ est continue sur $[0; 24]$. Donc :

$$\begin{aligned}m &= \frac{1}{24} \left[\int_0^{24} 8e^{-0,12t} \, dt + \int_0^{24} 11 \, dt \right] m = \frac{1}{24} \left(\left[-\frac{200}{3} e^{-0,12t} \right]_0^{24} + [11t]_0^{24} \right) \\ &= \frac{1}{24} \left(-\frac{200}{3} e^{-2,88} + \frac{200}{3} + 264 \right) \\ &= \frac{1}{24} \left(-\frac{200}{3} \times 0,0562 + 66,67 + 264 \right) \\ &= \frac{1}{24} (-3,75 + 330,67) \\ &= \frac{326,92}{24} \\ &\approx 13,6\end{aligned}$$

Réponse : b. 13,6

3. Calculons $\int_1^{\ln 2} e^{-x} \, dx$:

La fonction $x \mapsto e^{-x}$ est continue sur $[1; \ln(2)]$, donc :

$$\begin{aligned}\int_1^{\ln 2} e^{-x} \, dx &= [-e^{-x}]_1^{\ln 2} \\ &= -e^{-\ln 2} - (-e^{-1}) \\ &= -e^{\ln 2^{-1}} + e^{-1} \\ &= -\frac{1}{2} + \frac{1}{e} \\ &= \frac{1}{e} - \frac{1}{2} \\ &= \frac{2 - e}{2e}\end{aligned}$$

Réponse : c. $\frac{2 - e}{2e}$

Exercice 2 : Deux intégrales d'un seul coup !**(3 points)**

On considère les deux intégrales :

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{1 + 2 \sin x} dx \quad \text{et} \quad J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(2x)}{1 + 2 \sin x} dx.$$

1. Calculer la valeur exacte de I .
2. Calculer la valeur exacte de $K = I + J$.
3. En déduire la valeur exacte de J .

Solution:

1. Soit u la fonction définie sur $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ par

$$\forall x \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right], u(x) = 1 + 2 \sin x$$

u est dérivable et, pour tout $x \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$, $u'(x) = 2 \cos x$. Ainsi

$$\forall x \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right], \frac{\cos x}{1 + 2 \sin x} = \frac{1}{2} \times \frac{u'(x)}{u(x)}$$

donc $x \mapsto \frac{1}{2} \ln |1 + 2 \sin x|$ est une primitive de f sur $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$.

Enfin, comme $x \mapsto \frac{\cos x}{1 + 2 \sin x}$ est continue sur $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$, on obtient

$$\begin{aligned} I &= \left[\frac{1}{2} \ln |1 + 2 \sin x| \right]_0^{\frac{\pi}{2}} \\ &= \frac{1}{2} \ln \left| 1 + 2 \sin \frac{\pi}{2} \right| - \frac{1}{2} \ln |1 + 2 \sin 0| \\ &= \frac{1}{2} \ln |1 + 2| - \frac{1}{2} \ln |1| \\ &= \frac{1}{2} \ln 3 - 0 \\ &= \frac{\ln 3}{2} \end{aligned}$$

2. Par linéarité de l'intégration,

$$\begin{aligned} K &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x + \sin(2x)}{1 + 2 \sin x} dx \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x + 2 \sin x \cos x}{1 + 2 \sin x} dx \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x (1 + 2 \sin x)}{1 + 2 \sin x} dx \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx \end{aligned}$$

Or, $x \mapsto \cos x$ est continue sur $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$, donc :

$$\begin{aligned} K &= [\sin x]_0^{\frac{\pi}{2}} \\ &= \sin \frac{\pi}{2} - \sin 0 \\ &= 1 - 0 \\ &= 1 \end{aligned}$$

3. On a donc $J = K - I = 1 - \frac{\ln 3}{2} = 1 - \frac{\ln 3}{2}$.

On peut aussi écrire $J = \frac{2 - \ln 3}{2}$ ou $J = \ln \left(\frac{e^2}{\sqrt{3}} \right)$.

Exercice 3 : Une suite d'intégrales du bac SMP 2018

(5 points)

On considère la suite de fonctions (f_n) définies sur $\mathbb{R}$, pour tout entier naturel n , par

$$f_n(x) = \frac{e^{nx}}{e^x + 1}$$

On va étudier la suite d'intégrales (I_n) définie, pour tout entier naturel n par

$$I_n = \int_0^1 f_n(x) \, dx$$

1. Calculer la valeur exacte de I_1 .
2. (a) Démontrer que $I_0 + I_1 = 1$.
(b) En déduire la valeur exacte de I_0 .
3. (a) Démontrer que, pour tout entier naturel $n \neq 0$, on a $nI_n + nI_{n+1} = e^n - 1$.
(b) En déduire la valeur exacte de I_2 .
4. Soit n un entier naturel non nul.
(a) Démontrer que, pour tout nombre réel x appartenant à $[0; 1]$, on a :

$$f_n(x) \geq \frac{e^{nx}}{e + 1}$$

(b) En déduire que $I_n \geq \frac{1}{e + 1} \times \left(\frac{e^n}{n} - \frac{1}{n} \right)$.

5. En déduire la limite de la suite (I_n) .

Solution:

1. On calcule $I_1 = \int_0^1 f_1(x) \, dx = \int_0^1 \frac{e^x}{e^x + 1} \, dx$.

Posons $u(x) = e^x + 1$, alors $u'(x) = e^x$.

Donc $f_1(x) = \frac{u'(x)}{u(x)}$, et une primitive de f_1 est $x \mapsto \ln |u(x)|$, i.e. $x \mapsto \ln(e^x + 1)$ (car $e^x + 1 > 0$). De plus, $x \mapsto \frac{e^x}{e^x + 1}$ est continue sur $[0; 1]$, donc :

$$\begin{aligned} I_1 &= [\ln(e^x + 1)]_0^1 \\ &= \ln(e^1 + 1) - \ln(e^0 + 1) \\ &= \ln(e + 1) - \ln(2) \end{aligned}$$

On peut aussi écrire $I_1 = \ln\left(\frac{e+1}{2}\right)$.

2. a. On a :

$$\begin{aligned} f_0(x) + f_1(x) &= \frac{1}{e^x + 1} + \frac{e^x}{e^x + 1} \\ &= \frac{1 + e^x}{e^x + 1} \\ &= 1 \end{aligned}$$

Donc pour tout $x \in [0; 1]$, $f_0(x) + f_1(x) = 1$.

En intégrant sur $[0; 1]$:

$$\int_0^1 (f_0(x) + f_1(x)) \, dx = \int_0^1 1 \, dx$$

$x \mapsto 1$ est continue sur $[0; 1]$, donc

$$\begin{aligned} I_0 + I_1 &= [x]_0^1 \\ I_0 + I_1 &= 1 \end{aligned}$$

b. De $I_0 + I_1 = 1$ et $I_1 = \ln(e + 1) - \ln(2)$, on déduit :

$$\begin{aligned} I_0 &= 1 - I_1 \\ &= 1 - \ln(e + 1) + \ln(2) \\ &= 1 + \ln(2) - \ln(e + 1) \\ &= 1 + \ln\left(\frac{2}{e + 1}\right) \\ &= \ln\left(\frac{2e}{e + 1}\right) \end{aligned}$$

3. a. Pour tout entier naturel $n \geq 1$:

$$\begin{aligned} nf_n(x) + nf_{n+1}(x) &= n \frac{e^{nx}}{e^x + 1} + n \frac{e^{(n+1)x}}{e^x + 1} \\ &= \frac{ne^{nx} + ne^{(n+1)x}}{e^x + 1} \\ &= \frac{ne^{nx}(1 + e^x)}{e^x + 1} \\ &= ne^{nx} \end{aligned}$$

En intégrant sur $[0; 1]$:

$$\begin{aligned} n \int_0^1 f_n(x) dx + n \int_0^1 f_{n+1}(x) dx &= \int_0^1 n e^{nx} dx \\ nI_n + nI_{n+1} &= [e^{nx}]_0^1 \\ nI_n + nI_{n+1} &= e^n - 1 \end{aligned}$$

b. De $nI_n + nI_{n+1} = e^n - 1$, on tire :

$$I_{n+1} = \frac{e^n - 1 - nI_n}{n}$$

Pour $n = 1$:

$$\begin{aligned} I_2 &= \frac{e^1 - 1 - 1 \times I_1}{1} \\ &= e - 1 - I_1 \\ &= e - 1 - \ln(e + 1) + \ln(2) \\ &= e - 1 + \ln\left(\frac{2}{e + 1}\right) \end{aligned}$$

4. a. Pour tout $x \in [0; 1]$, par croissance de l'exponentielle, $e^0 \leq e^x \leq e^1$, c'est-à-dire $1 \leq e^x \leq e$.

Donc $0 < e^x + 1 \leq e + 1$. Ainsi,

$$f_n(x) = \frac{e^{nx}}{e^x + 1} \geq \frac{e^{nx}}{e + 1}$$

b. En intégrant l'inégalité sur $[0; 1]$:

$$\begin{aligned} I_n &= \int_0^1 f_n(x) dx \\ I_n &\geq \int_0^1 \frac{e^{nx}}{e + 1} dx \\ I_n &\geq \frac{1}{e + 1} \int_0^1 e^{nx} dx \end{aligned}$$

La fonction $x \mapsto e^{nx}$ est continue sur $[0; 1]$, donc

$$\begin{aligned} I_n &= \frac{1}{e + 1} \left[\frac{e^{nx}}{n} \right]_0^1 \\ &= \frac{1}{e + 1} \times \frac{e^n - 1}{n} \\ &= \frac{1}{e + 1} \times \left(\frac{e^n}{n} - \frac{1}{n} \right) \end{aligned}$$

5. Par croissance comparée, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{e^n}{n} = +\infty$. Par somme et produit,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{e + 1} \times \left(\frac{e^n}{n} - \frac{1}{n} \right) = +\infty$$

De plus,

$$I_n \geq \frac{1}{e+1} \times \left(\frac{e^n}{n} - \frac{1}{n} \right)$$

Ainsi, d'après le théorème de comparaison, $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n = +\infty$.

Exercice 4 : Baccalauréat national

(10 points)

Partie A : étude d'une fonction f

La fonction f est définie sur l'intervalle $]0; +\infty[$ par :

$$f(x) = x - 2 + \frac{1}{2} \ln x$$

On admet que la fonction f est deux fois dérivable sur $]0; +\infty[$ et on note f' sa dérivée et f'' sa dérivée seconde.

1. (a) Déterminer, en justifiant, les limites de f en 0 et en $+\infty$.
 (b) Montrer que, pour tout x appartenant à $]0; +\infty[$, on a $f'(x) = \frac{2x+1}{2x}$.
 (c) Étudier le sens de variation de f sur $]0; +\infty[$.
 (d) Étudier la convexité de f sur $]0; +\infty[$.
2. (a) Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet dans $]0; +\infty[$ une solution unique qu'on notera α et justifier que α appartient à l'intervalle $[1; 2]$.
 (b) Déterminer le signe de $f(x)$ pour $x \in]0; +\infty[$.
 (c) Montrer que $\ln(\alpha) = 2(2 - \alpha)$.

Partie B : étude d'une fonction g

La fonction g est définie sur $]0; 1]$ par :

$$g(x) = -\frac{7}{8}x^2 + x - \frac{1}{4}x^2 \ln x$$

On admet que la fonction g est dérivable sur $]0; 1]$ et on note g' sa fonction dérivée.

1. Calculer $g'(x)$ pour $x \in]0; 1]$ puis vérifier que $g'(x) = xf\left(\frac{1}{x}\right)$.
2. (a) Justifier que, pour tout x appartenant à l'intervalle $\left]0; \frac{1}{\alpha}\right[$, $f\left(\frac{1}{x}\right) > 0$.
 (b) On admet le tableau de signes suivant :

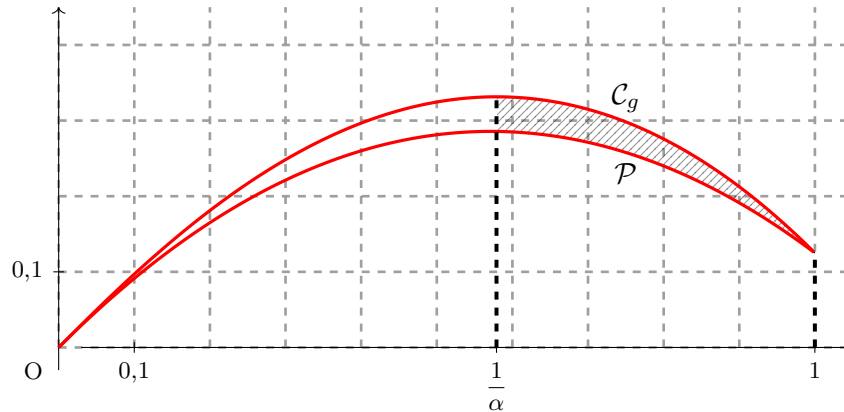
x	0	$\frac{1}{\alpha}$	1
signe de $f\left(\frac{1}{x}\right)$	+	0	-

En déduire le tableau de variations de g sur l'intervalle $]0; 1]$. Les images et les limites ne sont pas demandées.

Partie C : un calcul d'aire.

On a représenté sur le graphique ci-dessous :

- La courbe $\mathcal{C}_g$ de la fonction g
- La parabole $\mathcal{P}$ d'équation $y = -\frac{7}{8}x^2 + x$ sur l'intervalle $]0; 1]$.



On souhaite calculer l'aire $\mathcal{A}$ du domaine hachuré compris entre les courbes $\mathcal{C}_g$ et $\mathcal{P}$, et les droites d'équations $x = \frac{1}{\alpha}$ et $x = 1$.

On rappelle que $\ln(\alpha) = 2(2 - \alpha)$.

- (a) Donner la position relative des courbes $\mathcal{C}_g$ et $\mathcal{P}$ sur l'intervalle $]0; 1]$.
- (b) Démontrer l'égalité :

$$\int_{\frac{1}{\alpha}}^1 x^2 \ln x \, dx = \frac{-\alpha^3 - 6\alpha + 13}{9\alpha^3}$$

- En déduire l'expression de l'aire $\mathcal{A}$ en fonction de α .

Solution: Partie A : étude de la fonction f .

$$\forall x \in]0; +\infty[, f(x) = x - 2 + \frac{1}{2} \ln x$$

- (a)

- Limite en 0 : On sait que $\lim_{x \rightarrow 0^+} x - 2 = -2$ et que $\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x = -\infty$, donc, par limite de somme, $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = -\infty$.
- Limite en $+\infty$:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x = \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = +\infty, \text{ d'où par limite de somme :}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

- (b) Sur $]0; +\infty[, f$ est une somme de fonctions dérivables et :

$$\forall x \in]0; +\infty[, f'(x) = 1 + \frac{1}{2} \times \frac{1}{x} = 1 + \frac{1}{2x} = \frac{2x+1}{2x}$$

(c) On a successivement : $0 < x \Rightarrow 0 < 2x < 2x + 1$ et

$2x + 1 > 2x > 0 \Rightarrow \frac{2x+1}{2x} > 1 > 0$. Donc $f'(x) > 1 > 0 : f'(x) > 0$
donc f est strictement croissante sur $]0; +\infty[$.

(d) f' est elle-même dérivable sur $]0; +\infty[$ et :

$$\forall x \in]0; +\infty[, f''(x) = 0 + \frac{1}{2} \times \left(-\frac{1}{x^2}\right) = -\frac{1}{2x^2}$$

Pour tout $x \in]0; +\infty[, x^2 > 0$, donc $2x^2 > 0$, donc $\frac{1}{2x^2} > 0$ et enfin $f''(x) < 0$.

Conclusion : la fonction f est concave sur $]0; +\infty[$.

2. (a) Sur l'intervalle $[1; 2]$, la fonction f est continue car dérivable sur cet intervalle et strictement croissante. De plus,

- $f(1) = 1 - 2 + 0,5 \times \ln 1 = -1 < 0$
- $f(2) = 2 - 2 + \frac{\ln 2}{2} = \frac{\ln 2}{2} > 0$

d'après le théorème de la bijection, il existe un réel unique $\alpha \in [1; 2]$ tel que $f(\alpha) = 0$.

(b) On a donc, par croissance de f ,

- $f(x) < 0$ sur $]0; \alpha[$
- $f(x) > 0$ sur $] \alpha; +\infty[$
- $f(\alpha) = 0$.

(c) Le dernier résultat s'écrit :

$$\alpha - 2 + \frac{1}{2} \ln \alpha = 0, \text{ donc } \frac{1}{2} \ln \alpha = 2 - \alpha, \text{ donc } \ln \alpha = 2(2 - \alpha)$$

Partie B : étude de la fonction g

$$\forall x \in]0; 1], g(x) = -\frac{7}{8}x^2 + x - \frac{1}{4}x^2 \ln x$$

1. g est une somme de produits de fonctions dérivable sur $]0; 1]$, elle est donc dérivable sur cet intervalle et

$$\begin{aligned} \forall x \in]0; 1], g'(x) &= -2 \times \frac{7}{8}x + 1 - \frac{1}{4} \left(2x \ln x + x^2 \times \frac{1}{x} \right) \\ &= -\frac{7}{4}x + 1 - \frac{1}{2}x \ln x - x \frac{1}{4} \\ &= -\frac{8}{4}x + 1 - \frac{1}{2}x \ln x \\ &= 1 - 2x - \frac{x \ln x}{2} \end{aligned}$$

Puisque $x \neq 0$, on peut factoriser par x et $g'(x) = x \left(\frac{1}{x} - 2 - \frac{\ln x}{2} \right)$.

Posons $X = \frac{1}{x}$, i.e. $x = \frac{1}{X}$. Alors $\ln X = \ln \left(\frac{1}{x} \right) = -\ln x$.

Ainsi, $g'(x) = \frac{1}{X} \left(X - 2 + \frac{1}{2} \ln X \right)$, soit $g'(x) = xf \left(\frac{1}{x} \right)$

2. (a) On a vu dans la partie A que, si $0 < x < \alpha$, alors $f(x) < 0$.
Donc, en prenant les inverses de ces nombres strictement positifs :

$$\frac{1}{\alpha} < \frac{1}{x}$$

et donc

$$f \left(\frac{1}{x} \right) > 0$$

- (b) D'après le tableau de signes admis précédemment, puisque $0 < x \leq 1$, on en déduit par produit que :

- $g' > 0$ sur $]0; \frac{1}{\alpha} [$: g est croissante sur cet intervalle
- $g' < 0$ sur $] \frac{1}{\alpha}; 1 [$: g est décroissante sur cet intervalle.
- $g' \left(\frac{1}{\alpha} \right) = 0$; $g \left(\frac{1}{\alpha} \right)$ est le maximum de g sur l'intervalle $[0; 1]$.

Partie C : un calcul d'aire

1. (a) On sait que, pour tout $x \in]0; 1]$

$$g(x) - \left(-\frac{7}{8}x^2 + x \right) = -\frac{1}{4}x^2 \ln x$$

Pour tout $x \in]0; 1]$, $\ln x \leq 0$ et comme $x^2 \geq 0$, on a $-\frac{1}{4}x^2 \ln x \geq 0$.

Conclusion : sur l'intervalle $]0; 1]$,

$$-\frac{7}{8}x^2 + x \leq -\frac{7}{8}x^2 + x - \frac{1}{4}x^2 \ln x$$

ce qui signifie géométriquement que sur cet intervalle l'arc de la parabole est en dessous de la représentation graphique de g .

- (b) On effectue une intégration par parties en posant

$$\begin{array}{lll} u(x) & = & \ln x \\ v'(x) & = & x^2 \end{array} \quad \text{d'où} \quad \begin{array}{lll} u'(x) & = & \frac{1}{x} \\ v(x) & = & \frac{x^3}{3} \end{array}$$

Les fonctions u et v sont dérivables sur l'intervalle $\left[\frac{1}{\alpha}; 1 \right]$ et leurs dérivées

sont continues sur ce même intervalle, donc :

$$\begin{aligned}\int_{\frac{1}{\alpha}}^1 x^2 \ln x \, dx &= \left[\frac{x^3}{3} \ln x \right]_{\frac{1}{\alpha}}^1 - \int_{\frac{1}{\alpha}}^1 \frac{x^2}{3} \, dx \\ &= \left[\frac{x^3}{3} \ln x - \frac{x^3}{9} \right]_{\frac{1}{\alpha}}^1 \\ &= -\frac{1}{9} - \left(\frac{1}{3\alpha^3} \ln \frac{1}{\alpha} - \frac{1}{9\alpha^3} \right) \\ &= -\frac{1}{9} - \frac{1}{3\alpha^3} \left(-\ln \alpha - \frac{1}{3} \right)\end{aligned}$$

i.e. en remplaçant $\ln \alpha$ par $2(2 - \alpha)$,

$$\begin{aligned}\int_{\frac{1}{\alpha}}^1 x^2 \ln x \, dx &= -\frac{1}{9} - \frac{1}{3\alpha^3} \left(-4 + 2\alpha - \frac{1}{3} \right) \\ &= -\frac{1}{9} + \frac{4}{3\alpha^3} - \frac{2}{3\alpha^2} + \frac{1}{9\alpha^3} \\ &= \frac{-\alpha^3 + 12 - 6\alpha + 1}{9\alpha^3} \\ &= \frac{-\alpha^3 - 6\alpha + 13}{9\alpha^3}\end{aligned}$$

2. L'aire de la partie hachurée est égale la différence des intégrales, dans cet ordre car la courbe représentative de g est au-dessus de l'arc de parabole.

$$\mathcal{A} = \int_{\frac{1}{\alpha}}^1 \left(-\frac{7}{8}x^2 + x - \frac{1}{4}x^2 \ln x \right) \, dx - \int_{\frac{1}{\alpha}}^1 \left(-\frac{7}{8}x^2 + x \right) \, dx$$

i.e. par linéarité de l'intégrale :

$$\mathcal{A} = \int_{\frac{1}{\alpha}}^1 \left(-\frac{1}{4}x^2 \ln x \right) \, dx = -\frac{1}{4} \int_{\frac{1}{\alpha}}^1 (x^2 \ln x) \, dx$$

i.e. d'après le calcul précédent :

$$\mathcal{A} = -\frac{1}{4} \times \frac{-\alpha^3 - 6\alpha + 13}{9\alpha^3} = \frac{\alpha^3 + 6\alpha - 13}{36\alpha^3} \approx 0,07 \text{ u.a.}$$