

Nom : _____

Prénom : _____

Bac blanc de mathématiques

Jeudi 11 décembre 2025 - 4 heures

L'utilisation d'une calculatrice **en mode examen** est autorisée.
 L'utilisation de tout matériel de géométrie est également autorisée.
 La qualité de la rédaction et la précision des raisonnements entreront
 pour une part importante dans l'appréciation de la copie.
 Le sujet comporte 6 pages et ne comporte pas d'annexe.
Rendre le sujet avec la copie.

Exercice	1	2	3	4	Total
Points:	12	8	10	8	38
Score:					

Exercice 1 :

On considère la fonction f définie sur $]0; +\infty[$ par $f(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}$.

Partie A

- 1) [1 point] Montrer que, pour tout nombre réel x strictement positif, on a $f(x) > 1$.
- 2) [1 point] Montrer que f est dérivable sur $]0; +\infty[$ et que, pour tout nombre réel x strictement positif, on a $f'(x) = 1 - (f(x))^2$.
- 3) a) [1 point] Montrer que, pour tout nombre réel x strictement positif, on a

$$f(x) = \frac{e^{2x} + 1}{e^{2x} - 1} = \frac{1 + e^{-2x}}{1 - e^{-2x}}$$

- b) [1 point] Déterminer la limite de f en 0.
- c) [1 point] Montrer que la limite de f en $+\infty$ est égale à 1.
- 4) [1 point] Étudier les variations de la fonction f et dresser son tableau de variations.
- 5) [1 point] Soit h la fonction définie sur $]1; +\infty[$ par $h(x) = \frac{1}{2} (\ln(x+1) - \ln(x-1))$.

Démontrer que, pour tous nombres réels x et y , avec $x \in]0; +\infty[$ et $y \in]1; +\infty[$, on a :

$$x = h(y) \iff y = f(x).$$

La fonction h est donc la fonction réciproque de la fonction f .

- 6) [$\frac{1}{2}$ point] En remarquant que la fonction f est de la forme $\frac{u'}{u}$, donner l'expression d'une primitive F de la fonction f .

Partie B

La vitesse, en mètres par seconde, d'un parachutiste, t secondes après l'ouverture du parachute peut être modélisée par une fonction v .

Cette fonction v est définie sur $]0; +\infty[$, par $v(t) = af\left(\frac{t}{250} + b\right)$ où a et b sont des constantes réelles qui dépendent des conditions atmosphériques et du matériel.

- 7) [2 points] À l'instant $t = 0$, quand il ouvre son parachute, la vitesse d'un parachutiste est de 50 mètres par seconde.

On sait aussi que : $\lim_{t \rightarrow +\infty} v(t) = 4$.

Déterminer les valeurs exactes des paramètres a et b .

- 8) Dans cette question, on pose $v(t) = 4f\left(\frac{t}{250} + 0,08\right)$.

- a) [$1\frac{1}{2}$ points] Démontrer que la fonction V définie sur $]0; +\infty[$ par

$$V(t) = 1000F\left(\frac{t}{250} + 0,08\right)$$

est une primitive sur $]0; +\infty[$ de la fonction v .

On admet que la distance, en mètres, parcourue par le parachutiste, t secondes après l'ouverture du parachute, est donnée par :

$$d(t) = V(t) - V(0)$$

- b) [1 point] Le saut du parachutiste a duré 125 secondes après l'ouverture du parachute. Calculer la distance parcourue, arrondie au mètre près.

Solution:**Partie A**

$$1. f(x) - 1 = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}} - 1 = \frac{e^x + e^{-x} - e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}} = \frac{2e^{-x}}{e^x - e^{-x}}$$

Pour tout réel x , $2e^{-x} > 0$

Par ailleurs : pour tout réel $x > 0$, $x > -x$ et la fonction exponentielle est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ donc : $e^x > e^{-x}$ et $e^x - e^{-x} > 0$.

D'où $f(x) - 1 > 0$ et finalement : $f(x) > 1$.

2. La fonction f est un quotient de fonctions dérivables sur $]0; +\infty[$ et le dénominateur ne s'annule pas. Donc f est dérivable sur $]0; +\infty[$ et on a :

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{(e^x - e^{-x})^2 - (e^x + e^{-x})^2}{(e^x - e^{-x})^2} \\ &= 1 - \left(\frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}\right)^2 \\ &= 1 - (f(x))^2 \end{aligned}$$

3. (a) $f(x) = \frac{e^{-x}(e^{2x} + 1)}{e^{-x}(e^{2x} - 1)} = \frac{e^{2x} + 1}{e^{2x} - 1}$ d'une part.

D'autre part $f(x) = \frac{e^x(1 + e^{-2x})}{e^x(1 - e^{-2x})} = \frac{1 + e^{-2x}}{1 - e^{-2x}}$.

(b) Avec la 1^{re} expression de $f(x)$ obtenue à la question précédente :

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} e^{2x} = 1 \text{ et } e^{2x} - 1 > 0 \text{ lorsque } x > 0, \text{ donc } \lim_{x \rightarrow 0^+} e^{2x} - 1 = 0^+$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} e^{2x} + 1 = 2 > 0 \quad \text{donc} \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty.$$

(c) Avec la 2^e expression de $f(x)$:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} -2x = -\infty \text{ et } \lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0 \text{ donc } \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-2x} = 0 \text{ et } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1.$$

4. On sait : $f'(x) = 1 - (f(x))^2 = (1 - f(x))(1 + f(x))$

Par ailleurs : $f(x) > 1$, donc $1 - f(x) < 0$ et $1 + f(x) > 0$; par conséquent $f'(x) < 0$.

Donc f est strictement décroissante sur $]0; +\infty[$.

x	0	$+\infty$
$f'(x)$	-	
f	$+\infty$	1

5. Pour tout $x > 0$ et pour tout $y > 1$:

$$\begin{aligned} x = h(y) &\Leftrightarrow x = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{y+1}{y-1} \right) \\ &\Leftrightarrow 2x = \ln \left(\frac{y+1}{y-1} \right) \\ &\Leftrightarrow e^{2x} = \frac{y+1}{y-1} \text{ par stricte croissance de } \exp \\ &\Leftrightarrow (y-1)e^{2x} = y+1 \\ &\Leftrightarrow (e^{2x} - 1)y = e^{2x} + 1 \Leftrightarrow y = \frac{e^{2x} + 1}{e^{2x} - 1} \\ &\Leftrightarrow y = f(x) \text{ d'après la question 3a.} \end{aligned}$$

Remarque : on peut diviser par $e^{2x} - 1$ car on sait que $x \neq 0$.

6. Si on pose $u(x) = e^x - e^{-x}$ alors $u'(x) = e^x + e^{-x}$ et $f(x) = \frac{u'(x)}{u(x)}$.

De plus, $e^x - e^{-x} > 0$ sur $]0; +\infty[$.

On peut choisir $F(x) = \ln(e^x - e^{-x})$

Partie B

7.

$$\begin{cases} v(0) = 50 \\ \lim_{t \rightarrow +\infty} v(t) = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a f(b) = 50 \\ \lim_{t \rightarrow +\infty} v(t) = 4 \end{cases}$$

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{t}{250} + b = +\infty \text{ et } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1$$

donc

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} f\left(\frac{t}{250} + b\right) = 1$$

Par conséquent : $\lim_{t \rightarrow +\infty} v(t) = a$ et $a = 4$

Calcul de b :

$$a f(b) = 50 \Leftrightarrow f(b) = \frac{50}{4} = 12,5 \Leftrightarrow b = h(12,5) \text{ d'après Partie A question 5}$$

$$b = \frac{1}{2}(\ln 13,5 - \ln 11,5) = \frac{1}{2} \ln \frac{13,5}{11,5} = \frac{1}{2} \ln \frac{27}{23}$$

8. (a) V est dérivable sur $]0; +\infty[$ et sa dérivée est :

$$V'(t) = \frac{1000}{250} F'\left(\frac{t}{250} + 0,08\right) = 4 f\left(\frac{t}{250} + 0,08\right) = v(t)$$

(b)

$$d(125) = V(125) - V(0)$$

$$\begin{aligned} d(125) &= 1000 F\left(\frac{125}{250} + 0,08\right) - 1000 F(0,08) \\ &= 1000 \ln(e^{0,58} - e^{-0,58}) - 1000 \ln(e^{0,08} - e^{-0,08}) \\ &\cong 2035 \text{ m} \end{aligned}$$

Exercice 2 :

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{u}, \vec{v})$ d'unité 1 cm.

Soit A, B et C les points d'affixes respectives $z_A = 9$, $z_B = 1 + i$ et $z_C = 4$.

Dans tout cet exercice, on considère l'application f qui, à tout point M d'affixe $z \neq 0$, associe le point M' d'affixe z' , telle que $z' = -\frac{9}{z}$.

- 1) [$\frac{1}{2}$ point] Calculer les affixes des points A' et B', images des points A et B par l'application f .
- 2) [$\frac{1}{2}$ point] Placer les points A, A', B et B' sur une figure que l'on complètera au fur et à mesure de l'exercice.
- 3) [1 point] Démontrer que l'application f admet exactement deux points fixes, que l'on appellera F et G.
- 4) [1 point] On appelle $\mathcal{C}$ le cercle de centre C et de rayon 5.

Démontrer que les points A, A', F et G appartiennent à ce cercle $\mathcal{C}$.

- 5) Cette question a pour objectif de montrer que, si un point M appartient au cercle $\mathcal{C}$, alors son image M' appartient également au cercle $\mathcal{C}$.
 - a) [$\frac{1}{2}$ point] Montrer que, pour tous nombres réels u , v et θ , on a

$$(u + ve^{i\theta})(u + ve^{-i\theta}) = u^2 + v^2 + 2uv \cos(\theta)$$

- b) [1 point] Montrer que, si z est de la forme $z = 5e^{i\theta} + 4$, avec $\theta \in \mathbb{R}$, alors

$$z' - 4 = -5 \times \frac{4e^{i\theta} + 5}{5e^{i\theta} + 4}.$$

- c) [1 point] Dédurre des questions a) et b) que, si un point M appartient au cercle $\mathcal{C}$, alors son image M' appartient également au cercle $\mathcal{C}$.
- 6) On note Δ l'ensemble des points dont l'affixe z vérifie : $\operatorname{Re}(z) = \operatorname{Im}(z)$.
 - a) [1 point] Démontrer que, si un point M, d'affixe $z \neq 0$, appartient à l'ensemble Δ , alors on aura :

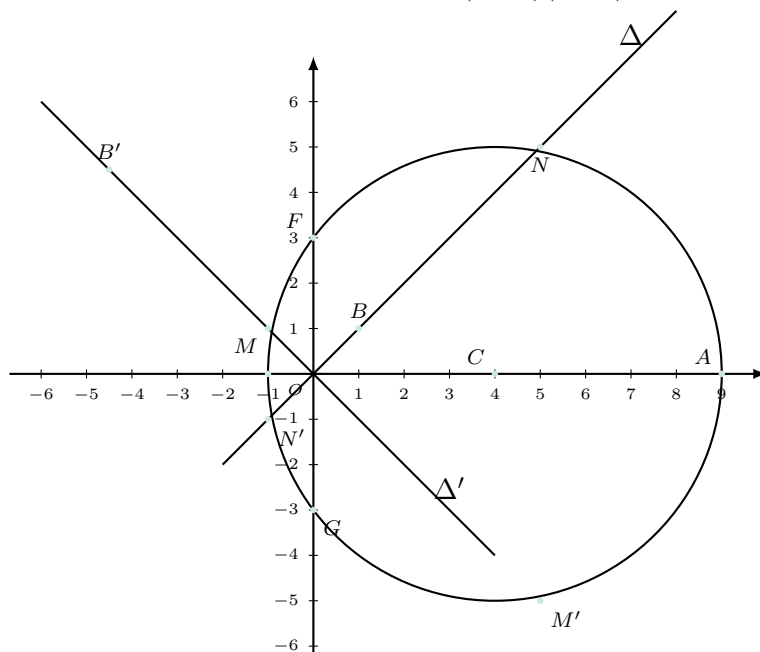
$$\begin{cases} \operatorname{Re}(z') = -\operatorname{Im}(z') \\ \text{et} \\ \text{les parties imaginaires de } z \text{ et de } z' \text{ ont le même signe} \end{cases}$$

- b) [$\frac{1}{2}$ point] Tracer l'ensemble Δ sur la figure et tracer l'image de Δ par f , que l'on notera Δ' .
- 7) [1 point] On note M et N les points d'intersection de Δ et du cercle $\mathcal{C}$.

Décrire une construction géométrique de leurs images M' et N' par f , sans avoir à calculer les affixes de ces images et les placer sur la figure

Solution:

$$1. \quad z_{A'} = -\frac{9}{9} = -1 \quad z_{B'} = \frac{-9}{1+i} = \frac{-9(1-i)}{(1+i)(1-i)} = -\frac{9}{2} + \frac{9}{2}i$$



2.

3. f admet un point fixe M d'affixe z si, et seulement si :

$$z' = z \Leftrightarrow -\frac{9}{z} = z \Leftrightarrow z^2 = -9 \Leftrightarrow z = 3i \text{ ou } z = -3i$$

Conclusion : f admet deux points fixes : F d'affixe $3i$ et G d'affixe $-3i$.

$$4. \quad CA = |z_A - 4| = |5| = 5 \quad CA' = |z_{A'} - 4| = |-5| = 5$$

$$CF = |z_F - 4| = |-4 + 3i| = \sqrt{16 + 9} = 5$$

$$\text{et } CG = |z_G - 4| = |-4 - 3i| = \sqrt{16 + 9} = 5$$

Par conséquent, les points A , A' , F et G appartiennent au cercle C .5. (a) Pour tous réels u , v et θ ,

$$\begin{aligned} (u + ve^{i\theta})(u + ve^{-i\theta}) &= u^2 + uv(e^{i\theta} + e^{-i\theta}) + v^2 e^{i\theta} e^{-i\theta} \\ &= u^2 + v^2 + 2uv \cos(\theta) \end{aligned}$$

$$\text{car d'après la formule d'Euler : } \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} = \cos(\theta)$$

(b) Si $z = 5e^{i\theta} + 4$ alors :

$$\begin{aligned} z' - 4 &= -\frac{9}{z} - 4 = \frac{-9 - 4z}{z} = \frac{-9 - 4(5e^{i\theta} + 4)}{5e^{i\theta} + 4} \\ &= \frac{-25 - 20e^{i\theta}}{5e^{i\theta} + 4} = -5 \frac{4e^{i\theta} + 5}{5e^{i\theta} + 4} \end{aligned}$$

(c) Le point $M(z)$ appartient à $\mathcal{C}$ si et seulement si $|z - 4| = 5$.

Il existe donc un réel θ tel que $z - 4 = 5e^{i\theta}$ c'est-à-dire $z = 4 + 5e^{i\theta}$.

$$\text{Alors } |z' - 4|^2 = (z' - 4)(\overline{z'} - 4) = \left(-5 \frac{4e^{i\theta} + 5}{5e^{i\theta} + 4}\right) \left(-5 \frac{4e^{-i\theta} + 5}{5e^{-i\theta} + 4}\right)$$

$$|z' - 4|^2 = 25 \frac{(4e^{i\theta} + 5)(4e^{-i\theta} + 5)}{(5e^{i\theta} + 4)(5e^{-i\theta} + 4)} = 25 \frac{25 + 16 + 40 \cos(\theta)}{16 + 25 + 40 \cos(\theta)} = 25$$

D'où $|z' - 4| = 5$ c'est-à-dire que $CM' = 5$, soit : M' appartient à $\mathcal{C}$.

6. (a) Si $M \in \Delta$ alors son affixe est de la forme $z = x + ix$ où $x \in \mathbb{R}$.

$$\text{Si } x \neq 0 \text{ alors } z' = \frac{-9}{x(1+i)} = \frac{-9(1-i)}{2x} = \frac{-9}{2x} + \frac{9}{2x}i$$

$$\text{Donc } \operatorname{Re}(z') = -\operatorname{Im}(z'); \text{ de plus, } \operatorname{Im}(z) = x \text{ et } \operatorname{Im}(z') = \frac{9}{2x}$$

D'où : $\operatorname{Im}(z)$ et $\operatorname{Im}(z')$ ont le même signe. M et M' sont donc du même côté de l'axe des réels.

(b) Δ' est la droite d'équation $y = -x$ privée du point O .

7. $\mathcal{C}$ et Δ se coupent en deux points M et N .

- D'après la question 5 : M et N appartenant à $\mathcal{C}$, leurs images M' et N' appartiennent à $\mathcal{C}$.
- D'après la question 6 : M et N appartenant à Δ , leurs images M' et N' appartiennent à Δ' .

M' et N' sont ainsi les points d'intersection de $\mathcal{C}$ et de Δ' .

Finalement, M et M' sont du même côté de l'axe des réels, et il en est de même pour N et N' .

On peut ainsi construire les images de M et N sans avoir à effectuer de calculs.

Exercice 3 :

Fabio, un ancien professeur de mathématiques d'un lycée franco-allemand, est désormais à la retraite. Chaque après-midi, il se consacre à l'une des trois activités suivantes : jouer aux cartes avec ses amis, écouter de la musique ou se promener en forêt.

Le premier jour de sa retraite, il est allé se promener en forêt.

Si, un jour donné, Fabio a joué aux cartes, alors :

- la probabilité qu'il écoute de la musique le lendemain est égale à 0,4
- la probabilité qu'il aille se promener en forêt le lendemain est égale à 0,6

Si, un jour donné, Fabio a écouté de la musique, alors :

- la probabilité qu'il joue aux cartes le lendemain est égale à 0,5
- la probabilité qu'il aille se promener en forêt le lendemain est égale à 0,5

Si, un jour donné, Fabio est allé se promener en forêt, alors :

- la probabilité qu'il joue aux cartes le lendemain est égale à 0,6
- la probabilité qu'il écoute de la musique le lendemain est égale à 0,4

Pour tout nombre entier naturel n non nul, on note :

X_n l'événement : « Fabio joue aux cartes le n -ième jour »

Y_n l'événement : « Fabio écoute de la musique le n -ième jour »

Z_n l'événement : « Fabio va se promener en forêt le n -ième jour »

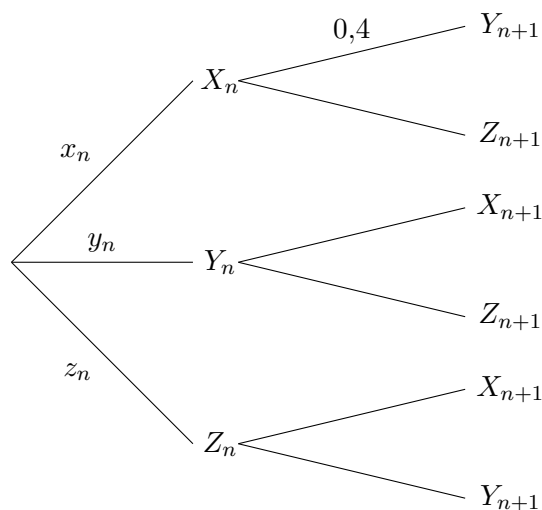
x_n la probabilité de l'événement X_n ,

y_n la probabilité de l'événement Y_n ,

z_n la probabilité de l'événement Z_n ,

$$U_n = \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \\ z_n \end{pmatrix} \text{ et, donc } U_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

1) [$\frac{1}{2}$ point] Recopier et compléter l'arbre pondéré :



- 2) [1 point] Démontrer que, pour tout entier naturel n non nul, on a

$$x_{n+1} = 0,5y_n + 0,6z_n$$

- 3) a) [$\frac{1}{2}$ point] Donner une expression analogue pour y_{n+1} et pour z_{n+1} en fonction de x_n , y_n et z_n (sans justifier).
 b) [$\frac{1}{2}$ point] En déduire que l'on peut écrire, sous forme matricielle,

$$U_{n+1} = AU_n, \quad \text{avec } A = \begin{pmatrix} 0 & 0,5 & 0,6 \\ 0,4 & 0 & 0,4 \\ 0,6 & 0,5 & 0 \end{pmatrix}.$$

Pour la suite, on admettra que, pour tout entier naturel n non nul, on a

$$U_n = A^{n-1}U_1$$

et on pose : $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & -2,5 & 1 \end{pmatrix}$ avec son inverse $P^{-1} = \frac{1}{14} \begin{pmatrix} 5 & -7 & 2 \\ 4 & 0 & -4 \\ 5 & 7 & 2 \end{pmatrix}$

- 4) [$1\frac{1}{2}$ points] Vérifier que la matrice $D = PAP^{-1}$ est une matrice diagonale.
 5) [$1\frac{1}{2}$ points] Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n non nul, on a

$$A^n = P^{-1}D^nP.$$

- 6) [$1\frac{1}{2}$ points] On admettra que, pour tout entier naturel n non nul, on a

$$D^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & (-0,6)^n & 0 \\ 0 & 0 & (-0,4)^n \end{pmatrix}.$$

Déterminer A^n en fonction de n .

- 7) [$1\frac{1}{2}$ points] En déduire x_n , y_n et z_n en fonction de n .

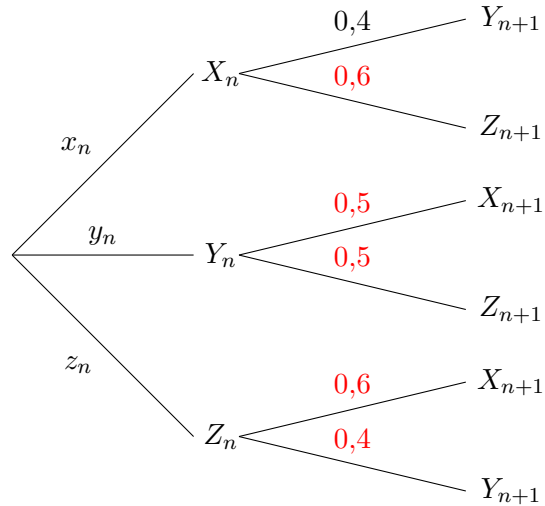
$$\text{Pour contrôler : } x_n = \frac{1}{14} (5 - 7 \times (-0,6)^{n-1} + 2 \times (-0,4)^{n-1}).$$

- 8) [$1\frac{1}{2}$ points] Déterminer la limite de x_n , y_n et z_n lorsque n tend vers $+\infty$.

Interpréter ces trois résultats dans le contexte de l'exercice.

Solution:

1.



2. Pour tout entier naturel n , X_n , Y_n et Z_n forment une partition de l'univers. D'après la formule des probabilités totales, on a donc :

$$\begin{aligned}
 P(X_{n+1}) &= P(X_{n+1} \cap X_n) + P(X_{n+1} \cap Y_n) + P(X_{n+1} \cap Z_n) \\
 &= P_{X_n}(X_{n+1})P(X_n) + P_{Y_n}(X_{n+1})P(Y_n) + P_{Z_n}(X_{n+1})P(Z_n) \\
 &= 0x_n + 0,5y_n + 0,6z_n = 0,5y_n + 0,6z_n = x_{n+1}
 \end{aligned}$$

3. (a) De la même manière on obtient :

$$y_{n+1} = 0,4x_n + 0,4z_n \quad \text{et} \quad z_{n+1} = 0,6x_n + 0,5y_n$$

(b) D'après les questions 2 et 3.a., on obtient le système :

$$\begin{cases} x_{n+1} = 0,5y_n + 0,6z_n \\ y_{n+1} = 0,4x_n + 0,4z_n \\ z_{n+1} = 0,6x_n + 0,5y_n \end{cases} \quad \text{où } n \geq 1 \quad \text{donc :}$$

$$\begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \\ z_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0,5 & 0,6 \\ 0,4 & 0 & 0,4 \\ 0,6 & 0,5 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \\ z_n \end{pmatrix}$$

$$\text{soit } U_{n+1} = AU_n \text{ avec } A = \begin{pmatrix} 0 & 0,5 & 0,6 \\ 0,4 & 0 & 0,4 \\ 0,6 & 0,5 & 0 \end{pmatrix}.$$

4.

$$PA = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & -2,5 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0,5 & 0,6 \\ 0,4 & 0 & 0,4 \\ 0,6 & 0,5 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0,6 & 0 & -0,6 \\ -0,4 & 1 & -0,4 \end{pmatrix}$$

puis :

$$\begin{aligned}
PAP^{-1} &= \frac{1}{14} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0,6 & 0 & -0,6 \\ -0,4 & 1 & -0,4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & -7 & 2 \\ 4 & 0 & -4 \\ 5 & 7 & 2 \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{14} \begin{pmatrix} 14 & 0 & 0 \\ 0 & -8,4 & 0 \\ 0 & 0 & -5,6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -0,6 & 0 \\ 0 & 0 & -0,4 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Le produit obtenu est bien une matrice diagonale D .

5. On note $\mathcal{Q}_n$ la propriété : $A^n = P^{-1}D^nP$.

Initialisation : Si $n = 1$ alors D'après 4), $PAP^{-1} = D$, d'où

$$\underbrace{P^{-1} \times P}_{=I_3} A \underbrace{P^{-1} \times P}_{=I_3} = P^{-1} \times D \times P \iff A = P^{-1}DP$$

Ainsi, $\mathcal{Q}_1$ est vraie.

Hérédité : On suppose que $\mathcal{Q}_n$ est vraie pour un certain entier naturel $n \geq 1$, c'est-à-dire que l'on a $A^n = P^{-1}D^nP$.

Alors $A^{n+1} = A \times A^n = P^{-1}DP \times P^{-1}D^nP = P^{-1}DD^nP = P^{-1}D^{n+1}P$

Conclusion : $\mathcal{Q}_1$ est vraie et $\mathcal{Q}_n$ est héréditaire, donc pour tout entier naturel $n \geq 1$ on a : $A^n = P^{-1}D^nP$.

$$\begin{aligned}
6. \quad P^{-1}D^n &= \frac{1}{14} \begin{pmatrix} 5 & -7 & 2 \\ 4 & 0 & -4 \\ 5 & 7 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & (-0,6)^n & 0 \\ 0 & 0 & (-0,4)^n \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{14} \begin{pmatrix} 5 & -7(-0,6)^n & 2(-0,4)^n \\ 4 & 0 & -4(-0,4)^n \\ 5 & 7(-0,6)^n & 2(-0,4)^n \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
P^{-1}D^nP &= \frac{1}{14} \begin{pmatrix} 5 & -7(-0,6)^n & 2(-0,4)^n \\ 4 & 0 & -4(-0,4)^n \\ 5 & 7(-0,6)^n & 2(-0,4)^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & -2,5 & 1 \end{pmatrix} = \\
&\frac{1}{14} \begin{pmatrix} 5 + 7(-0,6)^n + 2(-0,4)^n & 5 - 5(-0,4)^n & 5 - 7(-0,6)^n + 2(-0,4)^n \\ 4 - 4(-0,4)^n & 4 + 10(-0,4)^n & 4 - 4(-0,4)^n \\ 5 - 7(-0,6)^n + 2(-0,4)^n & 5 - 5(-0,4)^n & 5 + 7(-0,6)^n + 2(-0,4)^n \end{pmatrix} = A^n.
\end{aligned}$$

7. On sait que $U_n = A^{n-1}U_1$, autrement dit, $\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \\ z_n \end{pmatrix} = A^{n-1} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. On en déduit :

$$\begin{aligned}
x_n &= \frac{1}{14} (5 - 7(-0,6)^{n-1} + 2(-0,4)^{n-1}) \\
y_n &= \frac{1}{14} (4 - 4(-0,4)^{n-1}) \\
z_n &= \frac{1}{14} (5 + 7(-0,6)^{n-1} + 2(-0,4)^{n-1})
\end{aligned}$$

$$8. -1 < -0,4 < 1 \text{ et } -1 < -0,6 < 1$$

$$\text{Donc } \lim_{n \rightarrow +\infty} (-0,4)^{n-1} = \lim_{n \rightarrow +\infty} (-0,6)^{n-1} = 0.$$

$$\text{D'où : } \lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = \frac{5}{14}, \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} y_n = \frac{4}{14} = \frac{2}{7} \quad \text{et} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} z_n = \frac{5}{14}$$

Interprétation : à long terme, la probabilité que Fabio joue aux cartes un jour donné tendra vers $\frac{5}{14}$, la probabilité qu'il écoute de la musique tendra vers $\frac{2}{7}$ et la probabilité qu'il aille se promener en forêt tendra vers $\frac{5}{14}$.

Exercice 4 :

L'espace est muni d'un repère orthonormal direct $(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$.

On note (xOy) le plan d'équation $z = 0$ et B le point de coordonnées $(2; 1; -1)$.

On considère la famille $(\mathcal{D}_k)$ de droites, définie de la façon suivante :

pour tout nombre réel k , $\mathcal{D}_k$ est la droite passant par le point $A(1; 2; 3)$, de vecteur directeur $\vec{v}_k \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ k \end{pmatrix}$.

Partie A

- 1) [1 point] Démontrer que la droite (AB) est une droite de la famille $(\mathcal{D}_k)$ et préciser laquelle.
- 2) [1 point] On appelle $\mathcal{P}$ le plan qui contient les droites $\mathcal{D}_0$ et $\mathcal{D}_1$.
Démontrer que plan $\mathcal{P}$ a pour équation cartésienne $x + y - 3 = 0$.
- 3) [1 point] Démontrer que le plan $\mathcal{P}$ est perpendiculaire au plan (xOy) .
- 4) [1 point] Démontrer que le plan $\mathcal{P}$ contient toutes les droites $\mathcal{D}_k$.
- 5) Pour tous nombres réels α et β non simultanément nuls, on appelle Δ la droite qui passe par A et de vecteur directeur $\vec{u} = \alpha \vec{v}_0 + \beta \vec{v}_1$.
 - a) [$\frac{1}{2}$ point] Démontrer que, si $\alpha + \beta = 0$, alors la droite Δ est parallèle à l'un des axes de coordonnées.
 - b) [$1\frac{1}{2}$ points] Démontrer que la droite Δ est une droite de la famille $(\mathcal{D}_k)$ si et seulement si $\alpha + \beta \neq 0$.

Partie B

- 6) [2 points] On considère la sphère $\mathcal{S}$ de centre B et de rayon 4.

Étudier, selon les valeurs du nombre réel k , la position relative de la sphère $\mathcal{S}$ et de la droite $\mathcal{D}_k$.

Solution:

1. $\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -4 \end{pmatrix} = -\vec{v}_4$ donc (AB) est la droite qui passe par A et de vecteur directeur $\vec{v}_4$: c'est la droite $\mathcal{D}_4$.
2. $\vec{v}_0 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\vec{v}_1 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ sont deux vecteurs directeurs non colinéaires du plan $\mathcal{P}$.

Soit $\vec{n} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ un vecteur normal à $\mathcal{P}$. Alors $\vec{n} \cdot \vec{v}_0 = 0$ et $\vec{n} \cdot \vec{v}_1 = 0$, soit :

$$\begin{cases} -a + b = 0 \\ -a + b + c = 0 \end{cases}.$$

On obtient $a = b$ et $c = 0$; on a par exemple $\vec{n} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et alors une équation cartésienne de $\mathcal{P}$ est de la forme : $x + y + d = 0$.

De plus, $A(1; 2; 3) \in \mathcal{P}$ donc $d = -3$.

Une équation cartésienne de $\mathcal{P}$ est : $x + y - 3 = 0$.

3. $\mathcal{P}$ est perpendiculaire au plan (xOy) si et seulement si un vecteur normal à $\mathcal{P}$ et un vecteur normal à (xOy) sont orthogonaux.

Ici : $\vec{n} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ est normal au plan $\mathcal{P}$, $\vec{k} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ est normal à (xOy) , et $\vec{n} \cdot \vec{k} = 0$.

Conclusion : $\mathcal{P}$ est perpendiculaire au plan (xOy) .

4. Soit $k \in \mathbb{R}$. Le point $M(x; y; z)$ appartient à $\mathcal{D}_k$ si et seulement s'il existe un réel t tel que
$$\begin{cases} x = 1 - t \\ y = 2 + t \\ z = 3 + kt \end{cases}$$

On a alors : $x + y - 3 = 1 - t + 2 + t - 3 = 0$ c'est à dire $M \in \mathcal{P}$.

Le plan $\mathcal{P}$ contient donc toutes les droites $\mathcal{D}_k$.

5. $\vec{u} = \alpha v_0 + \beta v_1$ donc $\vec{u} \begin{pmatrix} -\alpha - \beta \\ \alpha + \beta \\ \beta \end{pmatrix}$

(a) Si $\alpha + \beta = 0$ alors $\vec{u} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \beta \end{pmatrix} = \beta \vec{k}$ et donc Δ est parallèle à l'axe (Oz) .

(b) On sait que $A \in \Delta$. Donc, Δ est une droite $\mathcal{D}_k$ ssi il existe $k \in \mathbb{R}$ tel que $\vec{u}$ et $\vec{v}_k$ sont colinéaires.

Autrement dit Δ est une droite D_k ssi il existe $\lambda \neq 0$ et $k \in \mathbb{R}$ tels que

$$\vec{u} = \lambda \vec{v}_k \iff \begin{cases} -\alpha - \beta &= -\lambda \\ \alpha + \beta &= \lambda \\ \beta &= \lambda k \end{cases}$$

Si $\alpha + \beta = 0$, on obtient $\lambda = 0$ puis $\beta = 0$, et enfin $\alpha = 0$ ce qui est exclus. Dans ce cas, Δ n'est pas une droite D_k .

Si $\alpha + \beta \neq 0$, on obtient $\lambda = \alpha + \beta$ puis $k = \frac{\beta}{\alpha + \beta}$.

Dans ce cas, Δ admet le vecteur $\vec{v}_{\frac{\beta}{\alpha + \beta}}$ comme vecteur directeur : c'est la droite $\Delta = \mathcal{D}_{\frac{\beta}{\alpha + \beta}}$.

6. Soit $k \in \mathbb{R}$.

Une équation cartésienne de la sphère S est $(x-2)^2 + (y-1)^2 + (z+1)^2 = 16$.

Une représentation paramétrique de la droite $\mathcal{D}_k$ est

$$\begin{cases} x = 1 - t \\ y = 2 + t \\ z = 3 + kt \end{cases}, \text{ avec } t \in \mathbb{R}$$

$$M \in \mathcal{D}_k \cap S \iff (-1-t)^2 + (1+t)^2 + (3+kt)^2 = 16 \iff (k^2+2)t^2 + (8k+4)t + 2 = 0$$

Le discriminant est : $\Delta = (8k+4)^2 - 8(k^2+2) = 56k^2 + 64k = 8k(7k+8)$.

Si $k = 0$ ou $k = -\frac{8}{7}$, $\Delta = 0$ et l'équation a une racine double : la droite $\mathcal{D}_k$ est tangente à la sphère.

Si $k > 0$ ou $k < -\frac{8}{7}$, $\Delta > 0$ et l'équation a deux racines : la droite $\mathcal{D}_k$ coupe la sphère en deux points distincts.

Si $-\frac{8}{7} < k < 0$, $\Delta < 0$ et l'équation n'a pas de racine : la droite $\mathcal{D}_k$ ne coupe pas la sphère.