

Devoir sur table n°3

Lundi 25 novembre 2025 – 1 h 50 min

L'utilisation d'une calculatrice est autorisée.

La qualité de la rédaction et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation de la copie.

Exercice 1 : Questionnaire à choix multiples**(2,5 points)**

Pour chaque question, une seule réponse est correcte. Noter la réponse correcte sur la copie, en justifiant.

1. L'équation $y'' = 0$ admet pour solutions :
A) Les fonctions constantes uniquement C) Les fonctions exponentielles
B) Les fonctions affines D) La fonction nulle uniquement
2. On considère l'équation $y' = ky$ avec $y(0) = 1$ où k est un réel. Pour que les solutions soient décroissantes, il suffit que :
A) $k > 0$ C) $k \geq 0$
B) $k < 0$ D) $k \neq 0$
3. Si y_1 et y_2 sont deux solutions de l'équation $y' = 5y$, alors...
A) $y_1 - y_2$ est aussi solution de $y' = 5y$ C) $y_1 - y_2$ est une fonction constante
B) $y_1 - y_2$ est aussi solution de $y' = 10y$ D) On ne peut rien conclure
4. Soit f une solution de $y' + 3y = 0$ telle que $f(0) = 8$. Que vaut $f(0) + f'(0)$?
A) -16 C) 8
B) -24 D) 11
5. La fonction $x \mapsto 5e^{2x} - 3(e^x)^2$ est solution de :
A) $y' = 2y$ C) $y' = 5y$
B) $y' = -2y$ D) $y' = -3y$

Solution:**Question 1 - Réponse : B****Résolution :**

L'équation $y'' = 0$ signifie que la dérivée seconde de y est nulle.

Méthode de résolution :

Si $y'' = 0$, alors y' est une primitive de la fonction nulle.

Donc : $y'(x) = C_1$ où C_1 est une constante.

Ensuite, y est une primitive de $y' = C_1$.

Donc : $y(x) = C_1x + C_2$ où C_2 est une autre constante.

Solution générale :

$$y(x) = C_1x + C_2 \quad \text{avec } (C_1; C_2) \in \mathbb{R}^2$$

Ce sont précisément les **fonctions affines**.

Question 2 - Réponse : B

Résolution :

L'équation $y' = ky$ avec $y(0) = 1$ a pour solution : $y(x) = e^{kx}$

Pour que ces solutions soient décroissantes, il suffit que $y'(x) < 0$ pour tout x .

$$y'(x) = ke^{kx}$$

Analyse :

- Si $k > 0$: e^{kx} est croissante, donc y est croissante
- Si $k < 0$: e^{kx} est décroissante, donc y est décroissante
- Si $k = 0$: $y = 1$ est constante

Conclusion : Pour avoir des solutions décroissantes, il faut $k < 0$

Question 3 - Réponse : A

Résolution :

Si y_1 et y_2 sont solutions de $y' = 5y$, alors :

$$y_1' = 5y_1$$

$$y_2' = 5y_2$$

Posons $z = y_1 - y_2$. Calculons z' :

$$z' = (y_1 - y_2)' = y_1' - y_2' = 5y_1 - 5y_2 = 5(y_1 - y_2) = 5z$$

Donc z vérifie l'équation $z' = 5z$.

Conclusion : $y_1 - y_2$ est aussi solution de $y' = 5y$.

Question 4 - Réponse : A

Résolution :

L'équation est $y' + 3y = 0$, soit $y' = -3y$.

On sait que $f(0) = 8$.

D'après l'équation différentielle :

$$f'(0) = -3f(0) = -3 \times 8 = -24$$

Donc :

$$f(0) + f'(0) = 8 + (-24) = \boxed{-16}$$

Question 5 - Réponse : A

Résolution :

Simplifions d'abord la fonction :

$$y(x) = 5e^{2x} - 3e^{2x} = (5 - 3)e^{2x} = 2e^{2x}$$

Calculons sa dérivée :

$$y'(x) = 2 \times 2e^{2x} = 4e^{2x}$$

Comparons avec $y(x)$:

$$y'(x) = 4e^{2x} = 2 \times 2e^{2x} = 2y(x)$$

Donc y vérifie : $\boxed{y' = 2y}$

Exercice 2 : Température d'une pièce**(3,5 points)**

La température en degré Celsius d'une pièce de fonte est une fonction f du temps t , exprimé en minutes, depuis sa sortie du four. La pièce sort du four à $1\,400\text{ }^{\circ}\text{C}$.

On admet que cette fonction f , définie et dérivable sur l'intervalle $[0; +\infty[$ est une solution de l'équation différentielle :

$$(E) : y' + 0,065y = 1,3$$

1. (a) Déterminer l'ensemble des solutions de l'équation différentielle (E).
 (b) Préciser la fonction f vérifiant la condition initiale.
2. (a) Déterminer, à la minute près, le temps nécessaire pour que la température de la pièce de fonte soit à $100\text{ }^{\circ}\text{C}$.
 (b) Déterminer les variations et la limite de la fonction f en $+\infty$.
 Interpréter le résultat dans le contexte de l'énoncé.

Solution:

1. (a)

$$\begin{aligned} y' + 0,065y &= 1,3 \Leftrightarrow y' = -0,065y + 1,3 \\ &\Leftrightarrow \forall t \in [0; +\infty[, y(t) = C e^{-0,065t} - \frac{1,3}{-0,065} \\ &\Leftrightarrow y(t) = C e^{-0,065t} + 20 \end{aligned}$$

$$(b) f(0) = 1400 \Leftrightarrow C + 20 = 1400 \Leftrightarrow C = 1380 \text{ donc } f(t) = 1380 e^{-0,065t} + 20$$

2. (a)

$$\begin{aligned} f(t) &= 100 \Leftrightarrow 1380 e^{-0,065t} + 20 = 100 \\ &\Leftrightarrow e^{-0,065t} = \frac{80}{1380} \\ &\Leftrightarrow e^{-0,065t} = \frac{4}{69} \\ &\Leftrightarrow -0,065t = \ln \frac{4}{69} \\ &\Leftrightarrow t = -\frac{1}{0,065} \ln \frac{4}{69} \approx 43,81 \end{aligned}$$

La température de la pièce de fonte est à 100°C au bout de 44 minutes.

- (b)

$$\begin{aligned} \forall t \in [0; +\infty[, f'(t) &= -0,065 \times 1380 e^{-0,065t} \\ &= -89,7 e^{-0,065t} < 0 \end{aligned}$$

Donc f est décroissante.

On a $\begin{cases} \lim_{t \rightarrow +\infty} -0,065t = -\infty \\ \lim_{t \rightarrow -\infty} e^t = 0 \end{cases}$, donc par composition $\lim_{t \rightarrow +\infty} e^{-0,065t} = 0$ et donc, par somme produit, $\lim_{t \rightarrow +\infty} f(t) = 20$.

Au bout d'un temps très long, la température de la pièce de fonte diminuera puis se stabilisera à 20 °C ce qui correspond vraisemblablement à la température ambiante.

Exercice 3 : Équation différentielle avec second membre

(4 points)

On considère l'équation différentielle

$$(E) : y' = y + (x + 1)e^{2x}$$

1. Déterminer les réels a et b tels que la fonction h définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = (ax + b)e^{2x}$ soit une solution de l'équation (E) .
2. Montrer que f est une solution de (E) si et seulement si $f - h$ est une solution de

$$y' = y$$

Indice : On raisonnera par double implication.

3. En déduire les solutions de (E) .

Solution:

On considère l'équation différentielle $(E) : y' = y + (x + 1)e^{2x}$.

1. Déterminons les réels a et b tels que $h(x) = (ax + b)e^{2x}$ soit une solution de (E) .

La fonction h est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ comme produit de fonctions dérivables.

Calculons $h'(x)$:

$$\begin{aligned} h'(x) &= a \times e^{2x} + (ax + b) \times 2e^{2x} \\ &= ae^{2x} + 2(ax + b)e^{2x} \\ &= (a + 2ax + 2b)e^{2x} \\ &= (2ax + a + 2b)e^{2x} \end{aligned}$$

Pour que h soit solution de (E) , il faut et il suffit que $h'(x) = h(x) + (x + 1)e^{2x}$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, c'est-à-dire :

$$\begin{aligned} (2ax + a + 2b)e^{2x} &= (ax + b)e^{2x} + (x + 1)e^{2x} \\ (2ax + a + 2b)e^{2x} &= (ax + b + x + 1)e^{2x} \\ (2ax + a + 2b)e^{2x} &= ((a + 1)x + b + 1)e^{2x} \end{aligned}$$

Comme l'exponentielle ne s'annule jamais, on peut simplifier par e^{2x} :

$$\forall x \in \mathbb{R}, 2ax + a + 2b = (a + 1)x + b + 1$$

Par identification des coefficients :

$$\begin{cases} 2a = a + 1 & (\text{coefficient de } x) \\ a + 2b = b + 1 & (\text{terme constant}) \end{cases}$$

De la première équation : $2a = a + 1 \Leftrightarrow a = 1$.

De la seconde équation : $a + 2b = b + 1 \Leftrightarrow 2b - b = 1 - a \Leftrightarrow b = 1 - 1 = 0$.

$$\boxed{a = 1 \quad \text{et} \quad b = 0}$$

Ainsi $h(x) = xe^{2x}$

2. Montrons que f est solution de (E) si et seulement si $f - h$ est solution de $y' = y$.

Sens direct ($\Rightarrow$) : Supposons que f est solution de (E) .

Alors $f'(x) = f(x) + (x + 1)e^{2x}$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Posons $u = f - h$. Alors $u' = f' - h'$.

Calculons

$$\begin{aligned} u'(x) &= f'(x) - h'(x) \\ &= [f(x) + (x + 1)e^{2x}] - [h(x) + (x + 1)e^{2x}] \\ &= f(x) - h(x) \\ &= u(x) \end{aligned}$$

Donc $u' = u$, c'est-à-dire $f - h$ est solution de $y' = y$.

Sens réciproque ($\Leftarrow$) : Supposons que $u = f - h$ est solution de $y' = y$.

Alors $u'(x) = u(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, c'est-à-dire $(f - h)'(x) = f(x) - h(x)$.

Donc $f'(x) - h'(x) = f(x) - h(x)$, soit $f'(x) = f(x) + h'(x) - h(x)$.

Or, d'après la question 1, h est solution de (E) , donc $h'(x) = h(x) + (x + 1)e^{2x}$.

Ainsi

$$\begin{aligned} f'(x) &= f(x) + h'(x) - h(x) \\ &= f(x) + [h(x) + (x + 1)e^{2x}] - h(x) \\ &= f(x) + (x + 1)e^{2x} \end{aligned}$$

Donc f est solution de (E) .

3. Déduisons les solutions de (E) .

L'équation $y' = y$ est une équation différentielle linéaire homogène dont les solutions sont :

$$y(x) = Ce^x \quad \text{avec } C \in \mathbb{R}$$

D'après la question 2, f est solution de (E) si et seulement si $f - h$ est solution de $y' = y$.

Donc $f - h = Ce^x$ avec $C \in \mathbb{R}$.

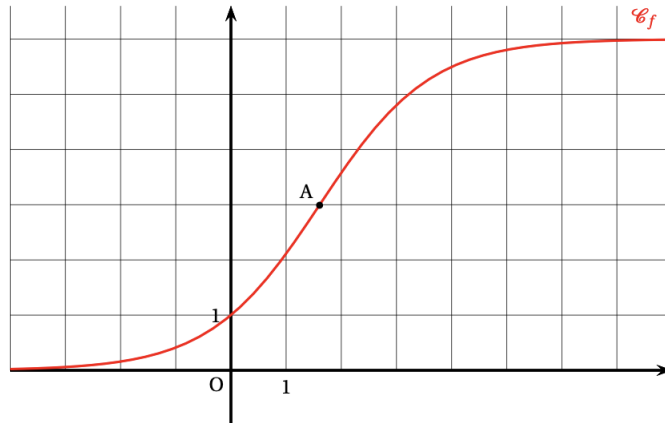
Par conséquent :

$$\boxed{f(x) = Ce^x + h(x) = Ce^x + xe^{2x} \quad \text{avec } C \in \mathbb{R}}$$

Exercice 4 : Étude de fonction**(10 points)****Partie A**

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \frac{6}{1 + 5e^{-x}}$

On a représenté sur le schéma ci-dessous la courbe représentative $\mathcal{C}_f$ de la fonction f .



1. Montrer que le point A de coordonnées $(\ln 5 ; 3)$ appartient à la courbe $\mathcal{C}_f$.
2. Montrer que la droite d'équation $y = 6$ est une asymptote à la courbe $\mathcal{C}_f$.
3. (a) On admet que f est dérivable sur $\mathbb{R}$. Montrer que, pour tout réel x

$$f'(x) = \frac{30e^{-x}}{(1 + 5e^{-x})^2}$$

- (b) En déduire le tableau de variations complet de f sur $\mathbb{R}$.
4. On admet que :

- f est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$;
- pour tout réel x ,

$$f''(x) = \frac{30e^{-x}(5e^{-x} - 1)}{(1 + 5e^{-x})^3}$$

- Étudier la convexité de f sur $\mathbb{R}$. On montrera en particulier que la courbe $\mathcal{C}_f$ admet un point d'inflexion.
 - Justifier que, pour tout réel x appartenant à $] -\infty ; \ln 5]$, on a : $f(x) \geq \frac{5}{6}x + 1$
5. On considère une fonction F_k définie sur $\mathbb{R}$ par $F_k(x) = k \ln(e^x + 5)$, où k est une constante réelle.
Déterminer la valeur du réel k de sorte que F_k soit une primitive de f sur $\mathbb{R}$.

Partie B

L'objectif de cette partie est d'étudier l'équation différentielle suivante :

$$(E) \quad y' = y - \frac{1}{6}y^2$$

On rappelle qu'une solution de l'équation (E) est une fonction u définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que pour tout x réel, on a :

$$u'(x) = u(x) - \frac{1}{6}[u(x)]^2.$$

1. Montrer que la fonction f définie dans la partie A est une solution de l'équation différentielle (E) .
2. Résoudre l'équation différentielle $y' = -y + \frac{1}{6}$
3. On désigne par g une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ qui ne s'annule pas.

On note h la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = \frac{1}{g(x)}$

On admet que h est dérivable sur $\mathbb{R}$.

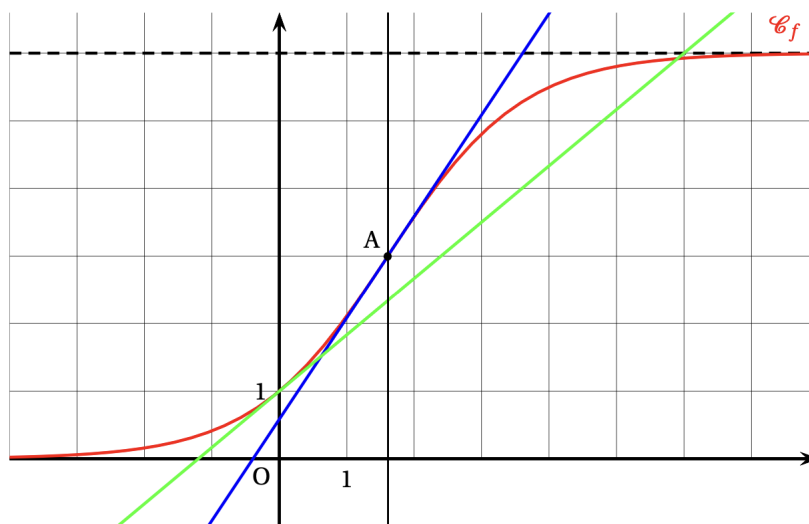
- (a) Montrer que si h est solution de l'équation différentielle $y' = -y + \frac{1}{6}$, alors g est solution de l'équation différentielle $y' = y - \frac{1}{6}y^2$

- (b) Pour tout réel positif m , on considère les fonctions g_m définies sur $\mathbb{R}$ par :

$$g_m(x) = \frac{6}{1 + 6me^{-x}}.$$

Montrer que pour tout réel positif m , la fonction g_m est solution de l'équation différentielle (E) : $y' = y - \frac{1}{6}y^2$.

Solution: On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par: $f(x) = \frac{6}{1 + 5e^{-x}}$.



1. On a $f(\ln 5) = \frac{6}{1 + 5e^{-\ln 5}}$.

Or $e^{-\ln 5} = \frac{1}{e^{\ln 5}} = \frac{1}{5}$, donc $f(\ln 5) = \frac{6}{1 + 5 \times \frac{1}{5}} = \frac{6}{2} = 3$. Donc $A(\ln 5; 3) \in \mathcal{C}_f$.

2. On sait que $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x} = 0$, donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} 1 + 5e^{-x} = 1$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 6$.

Donc la droite d'équation $y = 6$ est asymptote horizontale à $\mathcal{C}_f$ en $+\infty$.

3. (a) Pour tout réel x , $f'(x) = -\frac{6 \times 5 \times (-1)e^{-x}}{(1 + 5e^{-x})^2} = \frac{30e^{-x}}{(1 + 5e^{-x})^2}$

- (b) On sait que, quel que soit $x \in \mathbb{R}$, $30e^{-x} > 0$ et $(1 + 5e^{-x})^2 > 0$; donc $f'(x) > 0$ sur $\mathbb{R}$: la fonction f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

De plus, $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^{-x} = +\infty$, donc $\lim_{x \rightarrow -\infty} 1 + 5e^{-x} = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$.

Donc l'axe des abscisses est asymptote à la courbe $\mathcal{C}_f$ en $-\infty$.

Enfin $f(0) = \frac{6}{1 + 5 \times 1} = \frac{6}{6} = 1$, d'où le tableau de variations :

x	$-\infty$	0	$\ln 5$	$+\infty$
$f'(x)$		+	+	+
$f(x)$	0	1	3	6

4. (a) Comme $30e^{-x} > 0$, $1 + 5e^{-x} > 0$ et donc $(1 + 5e^{-x})^3 > 0$, le signe de $f''(x)$ est celui de $5e^{-x} - 1$:

•

$$5e^{-x} - 1 = 0 \iff 5e^{-x} = 1$$

$$\iff e^{-x} = \frac{1}{5}$$

$$\Rightarrow -x = \ln \frac{1}{5}$$

$$\iff -x = -\ln 5$$

$$\iff x = \ln 5$$

• $5e^{-x} - 1 > 0 \iff x > \ln 5$

• $5e^{-x} - 1 < 0 \iff x < \ln 5$

Conclusion : f est convexe sur l'intervalle $]-\infty ; \ln 5[$, concave sur $] \ln 5 ; +\infty[$ et a un point d'inflexion d'abscisse $\ln 5$ car la dérivée seconde change de signe en ce point : il s'agit du point A .

- (b) Une équation de la tangente T_0 à $\mathcal{C}$ au point d'abscisse 0 est :

$$y = f(0)(x - 0) + f(0)$$

On a vu que $f(0) = 1$ et $f'(0) = \frac{30e^0}{(1 + 5e^0)^2} = \frac{30}{36} = \frac{5}{6}$.

Donc $M(x ; y) \in T_0 \iff y - 1 = \frac{5}{6}(x - 0) \iff y = \frac{5}{6}x + 1$.

Or on a vu que sur l'intervalle $] -\infty; \ln 5[$, la fonction f est convexe et par conséquent que sa courbe représentative $\mathcal{C}$ est au dessus de ses tangentes menées en un point de l'intervalle $] -\infty; \ln 5[$, donc en particulier au dessus de la tangente T_0 en $x = 0$, donc numériquement :

$$\forall x \in] -\infty; \ln 5[, f(x) \geq \frac{5}{6}x + 1$$

5. On considère une fonction F_k définie sur $\mathbb{R}$ par $F_k(x) = k \ln(e^x + 5)$, où k est une constante réelle. F_k est une fonction composée de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ (car $e^x + 5 > 0$), elle est donc dérivable sur $\mathbb{R}$. Elle est une primitive de f si :

$$\forall x \in \mathbb{R}, F'_k(x) = f(x) \text{ i.e. } k \frac{e^x}{e^x + 5} = \frac{6}{1 + 5e^{-x}}$$

soit en multipliant chaque terme de $F'_k(x)$ par e^{-x} :

$$k \frac{1}{1 + 5e^{-x}} = \frac{6}{1 + 5e^{-x}}$$

i.e.

$$k = 6$$

Donc $\forall x \in \mathbb{R}, F_6(x) = 6 \ln(e^x + 5)$.

Partie B

L'objectif de cette partie est d'étudier l'équation différentielle: $(E) : y' = y - \frac{1}{6}y^2$.

$$\begin{aligned} 1. \quad f(x) - \frac{1}{6}[f(x)]^2 &= \frac{6}{1 + 5e^{-x}} - \frac{1}{6} \times \frac{36}{(1 + 5e^{-x})^2} \\ &= \frac{6}{1 + 5e^{-x}} - \frac{6}{(1 + 5e^{-x})^2} \\ &= \frac{6(1 + 5e^{-x}) - 6}{(1 + 5e^{-x})^2} \\ &= \frac{30e^{-x}}{(1 + 5e^{-x})^2} \\ &= f'(x) \end{aligned}$$

Donc f est bien une solution de l'équation (E) .

2.
 - Les solutions de l'équation $y' = -y$ sont les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par $x \mapsto Ke^{-x}$ avec $K \in \mathbb{R}$;
 - La fonction $x \mapsto \frac{1}{6}$ est la seule fonction constante solution de l'équation à résoudre ;
 - Les fonctions solutions de l'équation différentielle proposée sont les fonctions définies par :

$$x \mapsto \frac{1}{6} + Ke^{-x} \quad \text{avec } K \in \mathbb{R}.$$

3. (a) On a donc : $h'(x) = -h(x) + \frac{1}{6}$

Or si $h(x) = \frac{1}{g(x)}$, alors $h'(x) = -\frac{g'(x)}{[g(x)]^2}$.

L'équation précédente devient :

$$-\frac{g'(x)}{[g(x)]^2} = -\frac{1}{g(x)} + \frac{1}{6} \text{ soit, en multipliant par } [g(x)]^2,$$

$$-g'(x) = -g(x) + \frac{1}{6}[g(x)]^2 \iff g'(x) = g(x) - \frac{1}{6}[g(x)]^2 \text{ ce qui signifie que}$$

la fonction g est une solution de l'équation différentielle $y' = y - \frac{1}{6}y^2$.

(b)

$$g_m(x) = \frac{6}{1 + 6me^{-x}}.$$

Puisque m est positif, alors $6me^{-x}$ l'est aussi et $1 + me^{-x} \geq 1 > 0$, donc finalement $g_m(x) > 0$ quel que soit le réel x . La fonction h_m définie par $h_m(x) = \frac{1}{g_m(x)}$ est donc bien définie sur $\mathbb{R}$.

Or $h_m(x) = \frac{1}{g_m(x)} = \frac{1 + 6me^{-x}}{6} = \frac{1}{6} + me^{-x}$ et on reconnaît une solution de l'équation différentielle de la question 2.

On a ensuite vu à la question 3.a. que si la fonction h_m était une solution, de $y' = -y + \frac{1}{6}$, alors g_m est elle solution de l'équation $y' = y - \frac{1}{6}y^2$.