

Devoir sur table n°3 - maths expertes

Vendredi 7 novembre 2025 - 1h

L'utilisation d'une calculatrice est autorisée.
La qualité de la rédaction et la précision des raisonnements entreront
pour une part importante dans l'appréciation de la copie.

Exercice 1 : Loi binomiale

(6 points)

Indiquer, pour chacune des quatre informations, si elle est vraie ou fausse, en justifiant sur la copie.

Une urne contient 75 boules blanches et 25 boules noires. L'expérience élémentaire consiste à tirer une boule. Les boules ont toutes la même probabilité d'être tirées. On effectue n tirages indépendants avec remise, n désignant un entier supérieur ou égal à 10. Soit X la variable aléatoire prenant pour valeur le nombre de boules blanches tirées.

- a) X suit une loi binomiale de paramètres n et $p = \frac{1}{4}$
- b) $\sigma(X) = \sqrt{0,1875n}$
- c) $P(X \geq 1) = \frac{2^{2n} - 1}{2^{2n}}$
- d) Pour tout entier k tel que $0 \leq k < n$, on a : $\frac{P(X = k+1)}{P(X = k)} = \frac{3(n-k)}{k+1}$

Solution:

- a) **Faux** À la répétition n fois, de façon indépendante, d'une épreuve à deux issues, on peut associer la variable aléatoire X qui comptabilise le nombre de succès ; ici, il y a succès si la boule tirée est blanche, avec $p = \frac{75}{100}$, c'est-à-dire $p = \frac{3}{4}$.

Ainsi X suit une loi binomiale de paramètres n et $p = \frac{3}{4}$.

- b) **Vrai**

$$\begin{aligned}\sigma(X) &= \sqrt{n \times \frac{3}{4} \times \frac{1}{4}} \text{ car } X \text{ suit la loi binomiale } \mathcal{B}\left(n; \frac{3}{4}\right) \\ &= \sqrt{0,1875n}\end{aligned}$$

c) **Vrai**

$$\begin{aligned}
 P(X \geq 1) &= 1 - P(X = 0) \\
 &= 1 - \binom{n}{0} \times \left(\frac{3}{4}\right)^0 \times \left(\frac{1}{4}\right)^n \\
 &= 1 - 1 \times 1 \times \frac{1}{(2^2)^n} \\
 &= 1 - \frac{1}{2^{2n}} \\
 &= \frac{2^{2n} - 1}{2^{2n}}
 \end{aligned}$$

d) **Vrai** X suit une loi binomiale de paramètres n et $p = \frac{3}{4}$.

Pour tout entier k compris entre 0 et n , on a :

$$P(X = k) = \binom{n}{k} \times \left(\frac{3}{4}\right)^k \times \left(\frac{1}{4}\right)^{n-k}$$

Donc :

$$P(X = k + 1) = \binom{n}{k+1} \times \left(\frac{3}{4}\right)^{k+1} \times \left(\frac{1}{4}\right)^{n-k-1}$$

Calculons le rapport :

$$\begin{aligned}
 \frac{P(X = k + 1)}{P(X = k)} &= \frac{\binom{n}{k+1} \times \left(\frac{3}{4}\right)^{k+1} \times \left(\frac{1}{4}\right)^{n-k-1}}{\binom{n}{k} \times \left(\frac{3}{4}\right)^k \times \left(\frac{1}{4}\right)^{n-k}} \\
 &= \frac{\binom{n}{k+1}}{\binom{n}{k}} \times \frac{\left(\frac{3}{4}\right)^{k+1}}{\left(\frac{3}{4}\right)^k} \times \frac{\left(\frac{1}{4}\right)^{n-k-1}}{\left(\frac{1}{4}\right)^{n-k}} \\
 &= \frac{\binom{n}{k+1}}{\binom{n}{k}} \times \frac{3}{4} \times \frac{1}{4} \\
 &= \frac{\binom{n}{k+1}}{\binom{n}{k}} \times \frac{3}{4} \times 4 \\
 &= \frac{\binom{n}{k+1}}{\binom{n}{k}} \times 3
 \end{aligned}$$

Or, on sait que :

$$\begin{aligned}\frac{\binom{n}{k+1}}{\binom{n}{k}} &= \frac{\frac{n!}{(k+1)!(n-k-1)!}}{\frac{n!}{k!(n-k)!}} = \frac{n!}{(k+1)!(n-k-1)!} \times \frac{k!(n-k)!}{n!} \\ &= \frac{k!(n-k)!}{(k+1)!(n-k-1)!} = \frac{k! \times (n-k) \times (n-k-1)!}{(k+1) \times k! \times (n-k-1)!} \\ &= \frac{n-k}{k+1}\end{aligned}$$

Donc :

$$\frac{P(X = k+1)}{P(X = k)} = \frac{n-k}{k+1} \times 3 = \frac{3(n-k)}{k+1}$$

L'affirmation est **vraie**.

Exercice 2 : Loi binomiale

(4 points)

Au cours de la fabrication de verres de lunettes, le verre doit subir un traitement. On estime que 10 % des verres présentent alors un défaut pour ce traitement. On prélève, au hasard, un échantillon de 50 verres dans la production. On suppose que la production est suffisamment importante pour assimiler ce prélèvement à un tirage avec remise. On note X la variable aléatoire qui, à chaque échantillon de ce type, associe le nombre de verres qui présentent un défaut.

1. Justifier que la variable aléatoire suit une loi binomiale et préciser les paramètres de cette loi.
2. Donner l'expression permettant de calculer la probabilité d'avoir, dans un tel échantillon, exactement 10 verres qui présentent un défaut.
Effectuer ce calcul et arrondir le résultat à 10^{-3} .
3. Calculer la probabilité qu'au moins 5 verres présentent un défaut dans un tel échantillon.
On arrondira le résultat à 10^{-3} .
4. En moyenne, combien de verres ayant ce défaut peut-on trouver dans un échantillon de 50 verres ?

Solution:

1. Justifier que X suit une loi binomiale et préciser les paramètres

La variable aléatoire X suit une **loi binomiale** car :

- On répète $n = 50$ épreuves identiques et indépendantes (prélèvement de 50 verres avec remise)
- Chaque épreuve a deux issues possibles : le verre présente un défaut (succès) ou non (échec)
- La probabilité de succès est constante : $p = 0,1$

Conclusion : X suit une loi binomiale de paramètres $n = 50$ et $p = 0,1$

On note : $X \hookrightarrow \mathcal{B}(50; 0,1)$

2. Probabilité d'avoir exactement 10 verres défectueux

La probabilité s'exprime par :

$$P(X = 10) = \binom{50}{10} \times (0,1)^{10} \times (0,9)^{40}$$

Calcul :

$$P(X = 10) = \binom{50}{10} \times (0,1)^{10} \times (0,9)^{40} \approx 0,015$$

Réponse : $P(X = 10) \approx 0,003$

3. Probabilité qu'au moins 5 verres présentent un défaut

On cherche $P(X \geq 5)$. On utilise l'événement contraire :

$$P(X \geq 5) = 1 - P(X < 5) = 1 - P(X \leq 4)$$

Or :

$$P(X \leq 4) = P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2) + P(X = 3) + P(X = 4)$$

Calcul à la calculatrice :

$$P(X \leq 4) \approx 0,431$$

Donc :

$$P(X \geq 5) = 1 - 0,431 = 0,569$$

Réponse : $P(X \geq 5) \approx 0,569$

4. Nombre moyen de verres défectueux dans un échantillon de 50 verres

Pour une loi binomiale $\mathcal{B}(n; p)$, l'espérance est :

$$E(X) = n \times p = 50 \times 0,1 = 5$$

Réponse : En moyenne, on peut trouver 5 verres présentant un défaut dans un échantillon de 50 verres.

Exercice 3 : Suites de matrices**(10 points)**

On étudie la population des Barbapapas dans leur région imaginaire. Le 1^{er} janvier 2025, cette région comptait 250 000 Barbapapas dont 70 % vivaient à Barbaville (la ville) et 30 % à Barbacampagne (la campagne).

L'examen des données statistiques recueillies au cours de plusieurs années amène à choisir de modéliser l'évolution de la population pour les années à venir de la façon suivante

chaque année, 5 % de ceux qui résident à Barbaville décident d'aller s'installer à Barbacampagne et 1 % de ceux qui résident à Barbacampagne choisissent d'aller habiter à Barbaville.

Pour tout entier naturel n , on note v_n le nombre de Barbapapas qui résident à Barbaville au 1^{er} janvier de l'année $(2025 + n)$ et c_n le nombre de ceux qui habitent à Barbacampagne à la même date.

1. Pour tout entier naturel n , exprimer v_{n+1} et c_{n+1} en fonction de v_n et c_n .

Solution: Analysons ce qui se passe entre l'année n et l'année $n + 1$:

Pour la ville (v_{n+1}) :

- 95 % des Barbapapas de la ville restent en ville : $0,95v_n$
- 1 % des Barbapapas de la campagne viennent en ville : $0,01c_n$

Donc : $v_{n+1} = 0,95v_n + 0,01c_n$

Pour la campagne (c_{n+1}) :

- 5 % des Barbapapas de la ville partent à la campagne : $0,05v_n$
- 99 % des Barbapapas de la campagne restent à la campagne : $0,99c_n$

Donc : $c_{n+1} = 0,05v_n + 0,99c_n$

On peut vérifier : $v_{n+1} + c_{n+1} = (0,95 + 0,05)v_n + (0,01 + 0,99)c_n = v_n + c_n$, ce qui confirme que la population totale reste constante.

2. Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 0,95 & 0,01 \\ 0,05 & 0,99 \end{pmatrix}$.

On pose $X = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ où a et b sont deux réels fixés et $Y = AX$.

Déterminer, en fonction de a et b , les réels c et d tels que $Y = \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}$.

Solution:

$$Y = AX = \begin{pmatrix} 0,95 & 0,01 \\ 0,05 & 0,99 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,95a + 0,01b \\ 0,05a + 0,99b \end{pmatrix}$$

Donc :

$$\begin{aligned}c &= 0,95a + 0,01b \\d &= 0,05a + 0,99b\end{aligned}$$

Les résultats précédents permettent d'écrire que pour tout entier naturel n ,

$$X_{n+1} = AX_n \text{ où } X_n = \begin{pmatrix} v_n \\ c_n \end{pmatrix}$$

On peut donc en déduire que pour tout entier naturel n , $X_n = A^n X_0$.

3. Soient les matrices $P = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}$ et $Q = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -5 & 1 \end{pmatrix}$.

a) Calculer PQ et QP . En déduire que la matrice P est inversible et donner son inverse en fonction de Q .

Solution: Calcul de PQ :

$$\begin{aligned}PQ &= \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 5 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -5 & 1 \end{pmatrix} \\&= \begin{pmatrix} 1 \times 1 + (-1) \times (-5) & 1 \times 1 + (-1) \times 1 \\ 5 \times 1 + 1 \times (-5) & 5 \times 1 + 1 \times 1 \end{pmatrix} \\&= \begin{pmatrix} 1+5 & 1-1 \\ 5-5 & 5+1 \end{pmatrix} \\&= \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix} \\&= 6I_2\end{aligned}$$

Calcul de QP :

$$\begin{aligned}QP &= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -5 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 5 & 1 \end{pmatrix} \\&= \begin{pmatrix} 1 \times 1 + 1 \times 5 & 1 \times (-1) + 1 \times 1 \\ (-5) \times 1 + 1 \times 5 & (-5) \times (-1) + 1 \times 1 \end{pmatrix} \\&= \begin{pmatrix} 1+5 & -1+1 \\ -5+5 & 5+1 \end{pmatrix} \\&= \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix} \\&= 6I_2\end{aligned}$$

On a donc $PQ = QP = 6I_2$.

Cela signifie que $P \times \frac{1}{6}Q = I_2$ et $\frac{1}{6}Q \times P = I_2$. Donc P est inversible, et par définition de l'inverse, on en déduit que :

$$P^{-1} = \frac{1}{6}Q = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -5 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{6} & \frac{1}{6} \\ -\frac{5}{6} & \frac{1}{6} \end{pmatrix}$$

b) Vérifier que la matrice $P^{-1}AP$ est une matrice diagonale, notée D , que l'on précisera.

Solution: Calculons d'abord AP :

$$\begin{aligned} AP &= \begin{pmatrix} 0,95 & 0,01 \\ 0,05 & 0,99 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 5 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0,95 + 0,05 & -0,95 + 0,01 \\ 0,05 + 4,95 & -0,05 + 0,99 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & -0,94 \\ 5 & 0,94 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Puis calculons $P^{-1}AP$:

$$\begin{aligned} P^{-1}AP &= \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -5 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -0,94 \\ 5 & 0,94 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 1 + 5 & -0,94 + 0,94 \\ -5 + 5 & 4,7 + 0,94 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 5,64 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0,94 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Donc $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0,94 \end{pmatrix}$ est bien une matrice diagonale.

c) Démontrer que pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 1, $A^n = PD^nP^{-1}$.

Solution: De la question précédente, on a $P^{-1}AP = D$, ce qui équivaut à

$$A = PDP^{-1}$$

Démontrons par récurrence que $A^n = PD^nP^{-1}$ pour tout $n \geq 1$.

Initialisation : Pour $n = 1$:

$$A^1 = A = PDP^{-1} = PD^1P^{-1}$$

La propriété est vraie au rang 1.

Hérédité : Supposons la propriété vraie pour un certain rang n : $A^n = PD^nP^{-1}$.

Montrons qu'elle est vraie au rang $n + 1$:

$$\begin{aligned} A^{n+1} &= A^n \times A \\ &= (PD^nP^{-1}) \times (PDP^{-1}) \\ &= PD^n(P^{-1}P)DP^{-1} \\ &= PD^nIDP^{-1} \\ &= PD^nDP^{-1} \\ &= PD^{n+1}P^{-1} \end{aligned}$$

La propriété est vraie au rang $n + 1$.

Conclusion : Par récurrence, pour tout entier naturel $n \geq 1$, $A^n = PD^nP^{-1}$.

4. Les résultats des questions précédentes permettent d'établir que

$$v_n = \frac{1}{6}(1 + 5 \times 0,94^n)v_0 + \frac{1}{6}(1 - 0,94^n)c_0$$

En supposons la population globale constante d'une année sur l'autre, quelles informations peut-on en déduire pour la répartition de la population des Barbapapas de cette région à long terme

Solution: Étudions le comportement de v_n quand n tend vers $+\infty$.

Puisque $-1 < 0,94 < 1$, on a $\lim_{n \rightarrow +\infty} 0,94^n = 0$.

Donc :

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow +\infty} v_n &= \frac{1}{6}(1 + 5 \times 0)v_0 + \frac{1}{6}(1 - 0)c_0 \\ &= \frac{1}{6}v_0 + \frac{1}{6}c_0 \\ &= \frac{1}{6}(v_0 + c_0) \\ &= \frac{1}{6} \times 250\,000 \\ &\approx 41\,667 \text{ Barbapapas} \end{aligned}$$

De même, comme $v_n + c_n = v_0 + c_0 = 250\,000$ (population constante), on a :

$$\begin{aligned}\lim_{n \rightarrow +\infty} c_n &= 250\,000 - \lim_{n \rightarrow +\infty} v_n \\ &\approx 250\,000 - 41\,667 \\ &\approx 208\,333 \text{ Barbapapas}\end{aligned}$$

Interprétation :

À long terme, la répartition de la population des Barbapapas tend vers un état d'équilibre où :

- Environ 41 667 Barbapapas (soit $\frac{1}{6}$ de la population totale, environ 16,7 %) vivent à Barbaville
- Environ 208 333 Barbapapas (soit $\frac{5}{6}$ de la population totale, environ 83,3 %) vivent à Barbacampagne

Cet état d'équilibre est indépendant de la répartition initiale. Les Barbapapas ont une forte préférence pour la campagne ! La migration de 5 % de la ville vers la campagne est beaucoup plus importante que celle de 1 % dans le sens inverse, ce qui explique cette concentration massive à Barbacampagne à long terme.