

Devoir sur table n°2

Jeudi 16 octobre 2025 - 1 h 50 min

L'utilisation d'une calculatrice est autorisée.

La qualité de la rédaction et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation de la copie.

Exercice 1 : Probabilités conditionnelles et variable aléatoire (6 points)

Le comité d'entreprise d'une société parisienne souhaite organiser un weekend en province. Une enquête est faite auprès des 1 200 employés de cette entreprise afin de connaître leur choix en matière de moyen de transports et a donné les résultats ci-contre :

	Train	Avion	Bus	Total
Femme	468	196	56	720
Homme	150	266	64	480
Total	618	462	120	1 200

Partie A

On interroge au hasard un employé de cette entreprise. On note :

- F l'événement « L'employé est une femme » ;
- T l'événement « L'employé choisit le train ».

1. Calculer les probabilités $P(F)$ et $P(T)$.
2. Déterminer la probabilité que l'employé ne choisisse pas le train (on donnera les résultats sous forme décimale).
3. Calculer la probabilité que l'employé interrogé soit une femme et qu'elle choisisse le train.
4. Les événements F et T sont-ils indépendants ?
5. L'employé interrogé au hasard ne choisit pas le train. Calculer la probabilité que cet employé soit une femme. Arrondir au millième.

Partie B

Après l'étude des résultats de l'enquête, le comité d'entreprise choisit le train comme moyen de transport. Pour les employés inscrits à ce voyage, deux formules sont proposées :

- Formule 1 : voyage en première classe et hôtel pour 150 euros.
- Formule 2 : voyage en deuxième classe et hôtel pour 100 euros.

40 % des employés choisissent la formule 1.

Le comité d'entreprise propose une excursion facultative pour un coût de 30 euros. Indépendamment de la formule choisie, 80 % des employés inscrits choisissent l'excursion facultative.

On interroge au hasard un employé inscrit à ce voyage. On note C le coût total du voyage en euros (excursion éventuelle comprise).

On appelle U l'événement « L'employé choisit la formule 1 », D l'événement « L'employé choisit la formule 2 » et E l'événement « L'employé choisit l'excursion facultative ».

1. Déterminer la loi de probabilité de C .
2. Calculer l'espérance de cette loi. Interpréter le résultat.

Solution: Partie A

Dans toute cette partie, il y a équiprobabilité.

1. D'après la formule de Laplace, $P(F) = \frac{720}{1200} = 0,6$ et $P(T) = \frac{618}{1200} = 0,515$.

Ainsi $P(F) = 0,6$ et $P(T) = 0,515$.

2. $P(\bar{T}) = 1 - P(T) = 1 - 0,515 = 0,485$.

Donc $P(\bar{T}) = 0,485$.

3. $P(F \cap T) = \frac{468}{1200} = 0,39$

La probabilité qu'un employé soit une femme qui choisit le train est

$$P(F \cap T) = 0,39$$

4. $P(F) \times P(T) = 0,6 \times 0,515 = 0,309$ et $P(F \cap T) \neq 0,309$. Donc les événements ne sont pas indépendants.

5. La probabilité cherchée est

$$P_{\bar{T}}(F) = \frac{P(F \cap \bar{T})}{P(\bar{T})}$$

T et $\bar{T}$ forment une partition de l'univers, donc d'après la formule des probabilités totales : $P(F) = P(F \cap T) + P(F \cap \bar{T})$. Ainsi

$$P(F \cap \bar{T}) = P(F) - P(F \cap T) = 0,6 - 0,39 = 0,21$$

Par conséquent, $P_{\bar{T}}(F) = \frac{0,21}{0,485} \approx 0,433$

La probabilité qu'un employé soit une femme sachant que cet employé n'a pas choisit le train est $P_{\bar{T}}(F) \approx 0,433$.

Partie B

Soit C le coût total du voyage (excursion éventuelle comprise).

- Si l'employé inscrit choisit la formule 1 et l'excursion facultative, il paie $150 + 30 = 180$ euros.
- Si l'employé inscrit choisit la formule 1 mais pas l'excursion facultative, il paie 150 euros.
- Si l'employé inscrit choisit la formule 2 et l'excursion facultative, il paie $100 + 30 = 130$ euros.
- Si l'employé inscrit choisit la formule 2 mais pas l'excursion facultative, il paie 100 euros.

1. $P(U \cap E) = 0,4 \times 0,8 = 0,32$;
 $P(U \cap \bar{E}) = 0,4 \times 0,2 = 0,08$
 et $P(D \cap \bar{E}) = 0,6 \times 0,2 = 0,12$.
 D'où la loi de probabilité de C :

Coût total en euros c_i	100	130	150	180
Probabilité $P(C = c_i)$	0,12	0,48	0,08	0,32

2. L'espérance mathématique de cette loi est :

$$E(C) = 100 \times 0,12 + 130 \times 0,48 + 150 \times 0,08 + 180 \times 0,32 = 144$$

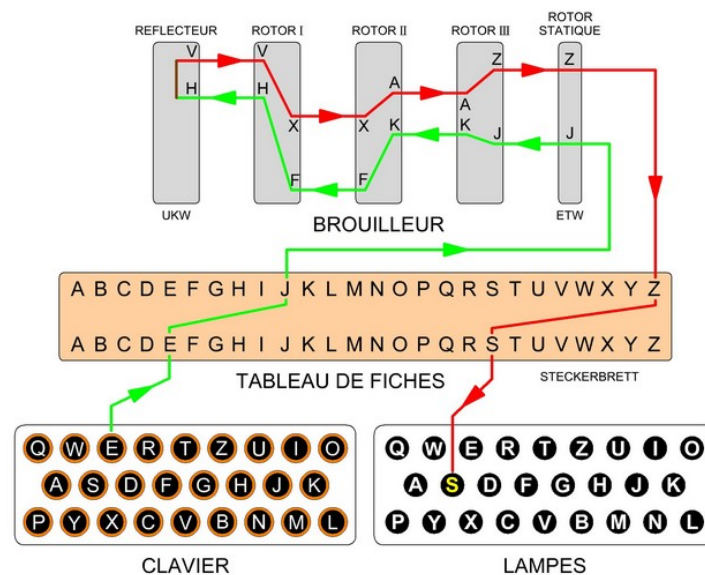
Le coût moyen du voyage (excursion éventuelle comprise) est de 144 euros par participant.

Exercice 2 : La machine Enigma

(6 points)

La machine *Enigma* était utilisée par les Allemands pendant la Seconde Guerre Mondiale pour chiffrer leurs communications. Avant la fameuse cryptanalyse d'Alan Turing, l'efficacité de la machine était assurée par le nombre immense de combinaisons initiales de la machine. Nous nous proposons de les dénombrer.

Fonctionnement simplifié de la machine Enigma



Principe : Quand on tape une lettre au clavier (par ex. E), le signal électrique :

1. passe par le **tableau de fiches** (qui peut échanger E avec une autre lettre si un câble relie E à une autre lettre)
2. traverse les **3 rotors** de droite à gauche (chaque rotor effectue une substitution)
3. est renvoyé par le **réflecteur**
4. retraverse les rotors de gauche à droite
5. repasse par le tableau de fiches (nouvel échange possible)
6. allume une **lampe** correspondant à la lettre chiffrée (par ex. S)

Dans toute la suite, **le rotor statique ne change rien au chiffrement et est inutile dans les calculs ; on peut l'oublier.**

Pour chiffrer un message, l'opérateur doit d'abord choisir **3 rotors** parmi un jeu de 5. Il les sélectionne un par un.

1. On choisit successivement et sans remise les 3 rotors parmi les 5 possibles. Combien de possibilité a-t-on ? On note ce nombre A .

On suppose avoir choisi les 3 rotors, que l'on va ranger dans un certain ordre. Chacun des 3 rotors doit être configuré dans une de ses 26 positions de départ, une pour chaque lettre de l'alphabet.

2. Combien de configurations de départ sont possibles ? On note ce nombre B .

Enfin, l'opérateur doit placer 10 câbles sur un tableau de connexions, chacun reliant 2 lettres parmi les 26 de l'alphabet. Chaque lettre est touchée par au plus un câble.

3. Combien y a-t-il de manières de placer le premier câble ?

4. On suppose que, pour $k \in \llbracket 1 ; 10 \rrbracket$, les $k - 1$ câbles premiers sont posés. Justifier que le nombre de façons de placer le k -ième câble est $\binom{28 - 2k}{2}$.

5. En déduire le nombre C de façons de placer les 10 câbles, en tenant compte de l'ordre.

6. Combien y a-t-il d'ordres possibles des 10 câbles ? (Autrement dit, combien y a-t-il de permutations d'un ensemble à 10 éléments ?) On note ce nombre D .

Remarque, pour vérifier votre résultat : d'après le raisonnement précédent, le nombre de combinaisons initiales de la machine est $E = A \times B \times \frac{C}{D}$, c'est-à-dire

$$E = 158\,962\,555\,217\,826\,360\,000$$

c'est-à-dire environ $1,589625552 \times 10^{20}$.

Solution: Question 1.

On doit choisir 3 rotors parmi 5 et les ordonner. Il s'agit d'un arrangement de 3 éléments parmi 5.

$$A = A_5^3 = \frac{5!}{(5-3)!} = \frac{5!}{2!} = \frac{120}{2} = 60$$

On peut aussi calculer : $5 \times 4 \times 3 = 60$

Question 2.

Chaque rotor peut avoir 26 positions différentes, et les choix sont indépendants pour les 3 rotors.

$$B = 26 \times 26 \times 26 = 26^3 = 17\,576$$

Question 3.

Pour placer le premier câble, on doit choisir 2 lettres parmi 26. L'ordre n'importe pas (relier A à B est identique à relier B à A), c'est donc une combinaison.

Nombre de manières de placer le premier câble : $\binom{26}{2} = \frac{26 \times 25}{2} = \frac{650}{2} = 325$

Question 4.

Si $k - 1$ câbles sont déjà posés, alors $2(k - 1)$ lettres sont déjà utilisées. Il reste donc $26 - 2(k - 1) = 26 - 2k + 2 = 28 - 2k$ lettres disponibles.

Pour placer le k -ième câble, on choisit 2 lettres parmi ces $28 - 2k$ lettres restantes, il y a donc $\binom{28-2k}{2}$ choix possibles.

Question 5.

Le nombre de manières de placer les 10 câbles en tenant compte de l'ordre est :

$$C = \binom{26}{2} \times \binom{24}{2} \times \binom{22}{2} \times \binom{20}{2} \times \binom{18}{2} \times \binom{16}{2} \times \binom{14}{2} \times \binom{12}{2} \times \binom{10}{2} \times \binom{8}{2}$$

$$C = \frac{26 \times 25}{2} \times \frac{24 \times 23}{2} \times \frac{22 \times 21}{2} \times \frac{20 \times 19}{2} \times \frac{18 \times 17}{2} \times \frac{16 \times 15}{2} \times \frac{14 \times 13}{2} \times \frac{12 \times 11}{2}$$

$$\times \frac{10 \times 9}{2} \times \frac{8 \times 7}{2}$$

On peut réécrire cela :

$$C = \frac{26!}{6! \times 2^{10}} = \frac{26!}{6! \times 1\,024}$$

Calculons numériquement :

$$C = \frac{403\,291\,461\,126\,605\,635\,584\,000\,000}{720 \times 1\,024}$$

$$= \frac{403\,291\,461\,126\,605\,635\,584\,000\,000}{737\,280}$$

$$\approx 5,47 \times 10^{20}$$

Question 6.

Le nombre de permutations d'un ensemble à 10 éléments est :

$$D = 10! = 3\,628\,800$$

Vérification

Le nombre de combinaisons initiales est : $E = A \times B \times \frac{C}{D}$

On divise par D car l'ordre dans lequel on place les 10 câbles n'a pas d'importance (seul le résultat final compte).

On obtient

$$E = \frac{60 \times 26^3 \times 26!}{6! \times 2^{10} \times 10!}$$

i.e.

$$E = 60 \times 17\,576 \times 1,51 \times 10^{14} \approx 1,59 \times 10^{20}$$

Conclusion : La machine Enigma possédait environ $1,59 \times 10^{20}$ combinaisons initiales possibles, i.e. **159 millions de milliards de milliards** de configurations différentes !

C'est ce nombre astronomique qui rendait le chiffrement si difficile à casser, jusqu'aux travaux d'Alan Turing et de l'équipe de Bletchley Park.

Exercice 3 : Probabilités et suites : une histoire de barbapapas... (8 points)

Barbamama tient une pâtisserie dans le village des Barbapapas. Elle remarque un comportement intéressant : parmi tous les barbaclients qui achètent un gâteau une semaine donnée, 90 % d'entre eux reviennent acheter un gâteau la semaine suivante. En revanche, parmi les Barbaclients qui n'achètent pas de gâteau une semaine donnée, 60 % d'entre eux n'achètent toujours pas de gâteau la semaine suivante.

On choisit au hasard un Barbaclient qui a acheté un gâteau au cours de la semaine 1 et, pour $n \geq 1$, on note A_n l'événement : « le Barbaclient achète un gâteau au cours de la semaine n » et $p_n = P(A_n)$. On a ainsi $p_1 = 1$.

1. Démontrer que $p_2 = 0,9$ et $p_3 = 0,85$.
2. Sachant que le Barbaclient achète un gâteau la semaine 3, quelle est la probabilité qu'il en ait acheté un la semaine 2 ?
3. Démontrer que, pour tout entier $n \geq 1$: $p_{n+1} = 0,5p_n + 0,4$.
4. Démontrer par récurrence que, pour tout entier $n \geq 1$, $p_n > 0,8$.
5. En déduire que la suite (p_n) est décroissante.
6. La suite (p_n) est-elle convergente ?
7. On pose, pour tout entier $n \geq 1$, $v_n = p_n - 0,8$
 - (a) Démontrer que (v_n) est géométrique.
 - (b) Exprimer v_n puis p_n en fonction de n .
 - (c) En déduire la limite de (p_n) .
 - (d) Interpréter cette limite dans le contexte de l'exercice.

Solution:

Question 1 : premiers termes de la suites

$$\begin{aligned} p_3 &= P(A_3) \\ &= P(A_3 \cap A_2) + P(A_3 \cap \overline{A_2}) \\ &= P(A_2) \times P_{A_2}(A_3) + P(\overline{A_2}) \times P_{\overline{A_2}}(A_3) \end{aligned}$$

D'après l'énoncé :

- Si le Barbaclient achète un gâteau la semaine n , il en achète un la semaine $n+1$ avec une probabilité de 0,9. Donc $P_{A_1}(A_2) = 0,9$ et $P_{A_2}(A_3) = 0,9$.
- Si le Barbaclient n'achète pas de gâteau la semaine n , il n'en achète pas la semaine $n+1$ avec une probabilité de 0,6. Donc il en achète un avec une probabilité de $1 - 0,6 = 0,4$. Ainsi $P_{\overline{A_1}}(A_2) = 0,4$ et $P_{\overline{A_2}}(A_3) = 0,4$.

Calculons d'abord p_2 . $\{A_1; \overline{A_1}\}$ forme une partition de Ω , donc d'après la formule des probabilités totales,

$$\begin{aligned} p_2 &= P(A_2) \\ &= P(A_1) \times P_{A_1}(A_2) + P(\overline{A_1}) \times P_{\overline{A_1}}(A_2) \\ &= 1 \times 0,9 + 0 \times 0,4 \\ &= 0,9 \end{aligned}$$

Puis calculons p_3 . $\{A_2, \overline{A_2}\}$ est une partition de Ω . Donc d'après la formule des probabilités totales :

$$\begin{aligned} p_3 &= p_2 \times 0,9 + (1 - p_2) \times 0,4 \\ &= 0,9 \times 0,9 + 0,1 \times 0,4 \\ &= 0,81 + 0,04 \\ &= 0,85 \end{aligned}$$

Question 2 : Probabilité conditionnelle

On cherche $P_{A_3}(A_2)$.

$$\begin{aligned} p_{A_3}(A_2) &= \frac{P(A_2 \cap A_3)}{P(A_3)} \\ &= \frac{P(A_2) \times P_{A_2}(A_3)}{p_3} \\ &= \frac{0,9 \times 0,9}{0,85} \\ &= \frac{0,81}{0,85} \\ &= \frac{81}{85} \end{aligned}$$

La probabilité que le Barbaclient ait acheté un gâteau la semaine 2 sachant qu'il en achète un la semaine 3 est $\boxed{\frac{81}{85}}$ (environ 0,953).

Question 3 : Relation de récurrence

$\{A_n; \overline{A_n}\}$ est une partition de Ω . Pour tout entier $n \geq 1$, utilisons la formule des probabilités totales.

$$\begin{aligned}
 p_{n+1} &= p(A_{n+1}) \\
 &= p(A_{n+1} \cap A_n) + p(A_{n+1} \cap \overline{A_n}) \\
 &= p(A_n) \times p_{A_n}(A_{n+1}) + p(\overline{A_n}) \times p_{\overline{A_n}}(A_{n+1}) \\
 &= p_n \times 0,9 + (1 - p_n) \times 0,4 \\
 &= 0,9p_n + 0,4 - 0,4p_n \\
 &= 0,5p_n + 0,4
 \end{aligned}$$

Donc pour tout entier $n \geq 1$: $\boxed{p_{n+1} = 0,5p_n + 0,4}$

Question 4 : Démonstration par récurrence

Montrons que, pour tout entier $n \geq 1$, $p_n > 0,8$.

Initialisation : Pour $n = 1$, on a $p_1 = 1 > 0,8$. La propriété est vraie au rang 1.

Hérédité : Supposons que pour un certain entier $n \geq 1$, on ait $p_n > 0,8$.

Montrons que $p_{n+1} > 0,8$.

D'après la relation de récurrence :

$$p_{n+1} = 0,5p_n + 0,4$$

Par hypothèse de récurrence, $p_n > 0,8$, donc :

$$\begin{aligned}
 p_{n+1} &> 0,5 \times 0,8 + 0,4 \\
 &> 0,4 + 0,4 \\
 &> 0,8
 \end{aligned}$$

La propriété est donc vraie au rang $n + 1$.

Conclusion : Par le principe de récurrence, pour tout entier $n \geq 1$, $\boxed{p_n > 0,8}$.

Question 5 : Monotonie

Étudions le signe de $p_{n+1} - p_n$:

$$\begin{aligned}
 p_{n+1} - p_n &= 0,5p_n + 0,4 - p_n \\
 &= -0,5p_n + 0,4 \\
 &= 0,5(0,8 - p_n)
 \end{aligned}$$

D'après la question 4, pour tout $n \geq 1$, on a $p_n > 0,8$.

Donc $0,8 - p_n < 0$, ce qui implique $p_{n+1} - p_n < 0$.

Ainsi, pour tout $n \geq 1$: $p_{n+1} < p_n$.

La suite (p_n) est donc **décroissante**.

Question 6 : Convergence

La suite (p_n) est décroissante et minorée par 0,8 (d'après la question 4).

D'après le théorème de convergence des suites monotones, une suite décroissante et minorée est convergente.

Donc la suite (p_n) est convergente.

Question 7 : Suite géométrique

On pose $v_n = p_n - 0,8$ pour tout $n \geq 1$.

a) Montrons que (v_n) est géométrique :

Soit $n \in \mathbb{N}$. Calculons v_{n+1} :

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= p_{n+1} - 0,8 \\ &= (0,5p_n + 0,4) - 0,8 \\ &= 0,5p_n - 0,4 \\ &= 0,5(p_n - 0,8) \\ &= 0,5v_n \end{aligned}$$

Donc pour tout $n \geq 1$: $v_{n+1} = 0,5v_n$.

La suite (v_n) est donc géométrique de raison $q = 0,5$.

b) Déterminer une expression de v_n et de p_n en fonction de n :

Le premier terme est $v_1 = p_1 - 0,8 = 1 - 0,8 = 0,2$.

Donc pour tout $n \geq 1$:

$$v_n = 0,2 \times (0,5)^{n-1} = 0,2 \times \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

Déterminons une expression de p_n en fonction de n :

Puisque $v_n = p_n - 0,8$, on a :

$$\begin{aligned} p_n &= v_n + 0,8 \\ &= 0,2 \times (0,5)^{n-1} + 0,8 \\ &= \frac{1}{5} \times \frac{1}{2^{n-1}} + \frac{4}{5} \\ &= \frac{2}{5 \times 2^n} + \frac{4}{5} \\ &= \frac{2}{5 \times 2^n} + \frac{4 \times 2^n}{5 \times 2^n} \\ &= \frac{2 + 4 \times 2^n}{5 \times 2^n} \end{aligned}$$

Soit :

$$p_n = 0,8 + \frac{0,2}{2^{n-1}} = 0,8 + \frac{0,4}{2^n}$$

c) Limite de (p_n) :

Puisque $-1 < 0,5 < 1$, on a $\lim_{n \rightarrow +\infty} (0,5)^{n-1} = 0$.

Donc :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} p_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} (0,8 + 0,2 \times (0,5)^{n-1}) = 0,8$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} p_n = 0,8 = \frac{4}{5}$$

d) Interprétation :

À long terme, la probabilité que le Barbaclient achète un gâteau une semaine donnée tend vers 80 %.

Exercice 4 : Main d'écriture et hérédité**(3 points)**

On étudie les pourcentages de droitiers et de gauchers selon la main d'écriture des parents (pour les ambidextres, on suppose qu'il y a toujours une main prioritaire).

On suppose que les unions hommes-femmes sont indépendantes de la main d'écriture.

On sait que :

- 90 % des enfants ayant leurs deux parents droitiers sont droitiers.
- 75 % des enfants ayant un parent droitier et l'autre gaucher sont droitiers.
- 60 % des enfants ayant leurs deux parents gauchers sont droitiers.

On note p la proportion de droitiers dans la population.

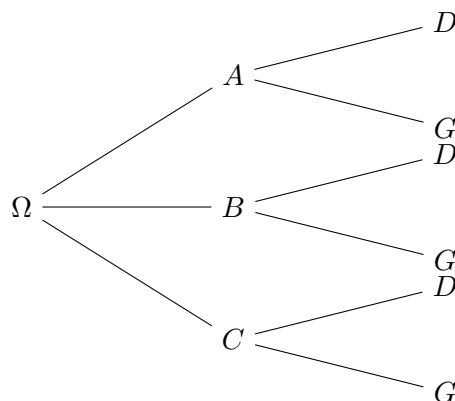
Le but de l'exercice est de déterminer p .

1. On considère les événements suivants :

- A : « les deux parents sont droitiers »
- B : « l'un des deux parents est droitier »
- C : « les deux parents sont gauchers »

Exprimer $P(A)$, $P(B)$ et $P(C)$ en fonction de p .

2. Compléter l'arbre pondéré ci-dessous (directement sur le sujet), où D et G désignent respectivement les événements « l'enfant est droitier » et « l'enfant est gaucher ».



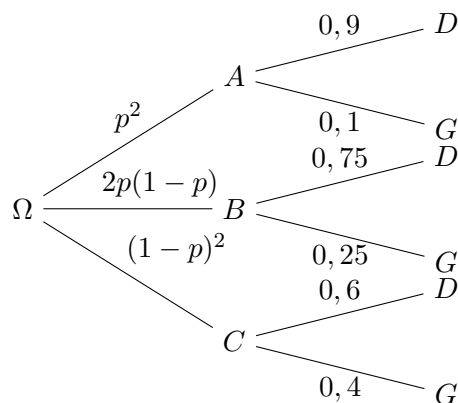
3. En supposant que la proportion de droitiers reste identique à chaque génération, déterminer la valeur de p .

Solution: Correction

1. Les unions sont indépendantes de la main d'écriture, donc :

- $P(A) = p \times p = p^2$
- $P(B) = p \times (1 - p) + (1 - p) \times p = 2p(1 - p)$
- $P(C) = (1 - p) \times (1 - p) = (1 - p)^2$

2. L'arbre pondéré est le suivant :



On a utilisé les données de l'énoncé pour les probabilités conditionnelles :

- $P_A(D) = 0,9$ donc $P_A(G) = 0,1$
- $P_B(D) = 0,75$ donc $P_B(G) = 0,25$
- $P_C(D) = 0,6$ donc $P_C(G) = 0,4$

3. Par hypothèse, la probabilité que l'enfant soit droitier est aussi égale à p .

Comme $\{A, B, C\}$ forment une partition de Ω , d'après la formule des probabilités totales :

$$P(D) = P(D \cap A) + P(D \cap B) + P(D \cap C)$$

$$P(D) = P(A) \times P_A(D) + P(B) \times P_B(D) + P(C) \times P_C(D)$$

$$p = p^2 \times 0,9 + 2p(1 - p) \times 0,75 + (1 - p)^2 \times 0,6$$

$$p = 0,9p^2 + 1,5p(1 - p) + 0,6(1 - p)^2$$

Développons le membre de droite :

$$p = 0,9p^2 + 1,5p - 1,5p^2 + 0,6(1 - 2p + p^2)$$

$$p = 0,9p^2 + 1,5p - 1,5p^2 + 0,6 - 1,2p + 0,6p^2$$

$$p = 0,6 + 0,3p$$

$$0,7p = 0,6$$

$$p = \frac{0,6}{0,7} = \frac{6}{7}$$

Conclusion : Sous ces hypothèses, il y aurait une proportion de $\frac{6}{7}$ de droitiers dans la population, soit environ 85,7 %.