

Devoir sur table n°1 - maths expertes

Mardi 30 septembre 2025 - 55 min

L'utilisation d'une calculatrice est autorisée.

La qualité de la rédaction et la précision des raisonnements entreront
pour une part importante dans l'appréciation de la copie.

Exercice 1 : Une suite définie par une récurrence... quadratique ! (12 points)

On considère la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par

$$\begin{cases} u_0 = 2 \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = -\frac{1}{2}(u_n)^2 + 3u_n - \frac{3}{2} \end{cases}$$

1. Calculer les valeurs exactes, données en fractions irréductibles, de u_1 et u_2 .
2. On considère la suite (v_n) définie, pour tout entier naturel n , par :

$$v_n = u_n - 3$$

- (a) Montrer que, pour tout entier naturel n ,

$$v_{n+1} = -\frac{1}{2}v_n^2$$

- (b) Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n , $-1 \leq v_n \leq 0$.

3. (a) Démontrer que, pour tout entier naturel n ,

$$v_{n+1} - v_n = -v_n \left(\frac{1}{2}v_n + 1 \right)$$

- (b) En déduire le sens de variation de la suite (v_n) .

4. (a) Montrer que la suite (v_n) converge.

- (b) Déterminer la limite de la suite (v_n) .

- (c) En déduire la limite de la suite (u_n) .

Solution:

$$1. \quad u_1 = -\frac{1}{2}(u_0)^2 + 3u_0 - \frac{3}{2} = -\frac{1}{2} \times 2^2 + 3 \times 2 - \frac{3}{2} = \frac{5}{2}$$

$$u_2 = -\frac{1}{2}(u_1)^2 + 3u_1 - \frac{3}{2} = -\frac{1}{2} \times \left(\frac{5}{2}\right)^2 + 3 \times \left(\frac{5}{2}\right) - \frac{3}{2} = \frac{23}{8}$$

2. (a) Pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= u_{n+1} - 3 \\ &= -\frac{1}{2}(u_n)^2 + 3u_n - \frac{3}{2} - 3 \\ &= -\frac{1}{2}\left((u_n)^2 - 6u_n + 9\right) \\ &= -\frac{1}{2}(u_n - 3)^2 \end{aligned}$$

Pour tout entier naturel n , $v_{n+1} = -\frac{1}{2}v_n^2$

(b) Posons, pour tout entier naturel n , $P(n)$: « $-1 \leq v_n \leq 0$ ».

Initialisation : pour $n = 0$, $v_0 = u_0 - 3 = 2 - 3 = -1$ donc $-1 \leq v_0 \leq 0$, alors $P(0)$ est vraie.

Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$ fixé. On suppose que $P(n)$ est vraie et on démontre que $P(n+1)$ est vraie.

But : $-1 \leq v_{n+1} \leq 0$. Or on sait que $-1 \leq v_n \leq 0$.

D'après l'hypothèse de récurrence :

$$-1 \leq v_n \leq 0$$

Or, la fonction carrée est décroissante sur $] -\infty ; 0]$, donc

$$1^2 \geq v_n^2 \geq 0^2$$

ainsi, en multipliant par $-\frac{1}{2}$ (qui est négatif), on obtient :

$$-\frac{1}{2} \leq -\frac{1}{2}v_n^2 \leq 0$$

donc

$$-1 \leq v_{n+1} \leq 0$$

donc $P(n+1)$ est vraie.

Conclusion : $P(0)$ est vraie et la propriété $P(n)$ est héréditaire à partir du rang 0 alors, d'après le principe du raisonnement par récurrence, $P(n)$ est vraie pour tout entier naturel.

Pour tout entier naturel n , $-1 \leq v_n \leq 0$

(a) Pour tout entier naturel n , $v_{n+1} - v_n = -\frac{1}{2}v_n^2 - v_n$

d'où $v_{n+1} - v_n = -v_n \left(\frac{1}{2}v_n + 1 \right)$

(b) Étudions le signe de chaque facteur de l'égalité précédente :

Pour tout entier naturel n , on a

$$-1 \leq v_n \leq 0$$

c'est-à-dire, en multipliant par $\frac{1}{2}$ qui est positif,

$$-\frac{1}{2} \leq \frac{1}{2}v_n \leq 0$$

ou encore, en ajoutant 1,

$$\frac{1}{2} \leq \frac{1}{2}v_n + 1 \leq 1$$

Donc on en déduit que, pour tout entier naturel n , $-v_n \geq 0$ et $\frac{1}{2}v_n + 1 \geq 0$ et par produit,

$$-v_n \left(\frac{1}{2}v_n + 1 \right) \geq 0$$

D'où $v_{n+1} - v_n \geq 0$.

Donc la suite (v_n) est croissante.

(a) La suite (v_n) est croissante et majorée par 0.

Par le théorème de convergence des suites monotones, la suite (v_n) converge vers un réel, noté L . On peut déduire de l'encadrement :

$$\text{pour tout entier naturel } n, -1 \leq v_n \leq 0$$

par passage à la limite, que $-1 \leq L \leq 0$.

(b) De $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = L$, il vient : $L = -\frac{1}{2}L^2$.

$$\text{i.e. } L \left(-\frac{1}{2}L + 1 \right) = 0, \text{ i.e. } L = 0 \text{ ou } L = -2.$$

Or, d'après la question 4.a. $-1 \leq L \leq 0$, donc $L = 0$.

Donc la suite (v_n) converge vers 0.

(c) Pour tout entier naturel n , $v_n = u_n - 3$, alors $u_n = v_n + 3$.

Par somme des limites, on déduit que $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 3$.

Tournez la page !

Exercice 2 : des suites adjacentes !**(8 points)**

Les suites (u_n) et (v_n) sont définies par :

$$\begin{cases} u_0 = -1 \\ u_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2}, n \in \mathbb{N} \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} v_0 = 2 \\ v_{n+1} = \frac{u_n + 4v_n}{5}, n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

On admet, pour tout l'exercice, que : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n < v_n$

On admettra que $\forall n \in \mathbb{N}, u_n < v_n$.

1. Démontrer que les suites (u_n) et (v_n) sont respectivement croissantes et décroissantes.
2. Montrer que les suites (s_n) et (t_n) définies pour tout n par $s_n = u_n - v_n$ et $t_n = u_n + \frac{5}{2}v_n$ sont géométriques (éventuellement constantes).
3. Exprimer (s_n) et (t_n) en fonction de n .
4. Montrer que les suites (u_n) et (v_n) sont adjacentes.
5. Déterminer la limite des suites (u_n) et (v_n) .

Solution: On admet que : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n < v_n$.

1.

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= \frac{u_n + v_n}{2} - u_n \\ &= \frac{u_n + v_n - 2u_n}{2} \\ &= \frac{v_n - u_n}{2} \end{aligned}$$

Comme $u_n < v_n$, on a $v_n - u_n > 0$, donc $u_{n+1} - u_n > 0$.

Donc la suite (u_n) est strictement croissante.

$$\begin{aligned} v_{n+1} - v_n &= \frac{u_n + 4v_n}{5} - v_n \\ &= \frac{u_n + 4v_n - 5v_n}{5} \\ &= \frac{u_n - v_n}{5} \end{aligned}$$

Comme $u_n < v_n$, on a $u_n - v_n < 0$, donc $v_{n+1} - v_n < 0$.

Donc la suite (v_n) est strictement décroissante.

2. Étude des suites (s_n) et (t_n) :

$$\begin{aligned}
 s_{n+1} &= u_{n+1} - v_{n+1} \\
 &= \frac{u_n + v_n}{2} - \frac{u_n + 4v_n}{5} \\
 &= \frac{5(u_n + v_n) - 2(u_n + 4v_n)}{10} \\
 &= \frac{5u_n + 5v_n - 2u_n - 8v_n}{10} \\
 &= \frac{3u_n - 3v_n}{10} \\
 &= \frac{3}{10}(u_n - v_n) \\
 &= \frac{3}{10}s_n
 \end{aligned}$$

(s_n) est la suite géométrique de raison $\frac{3}{10}$ et $s_0 = u_0 - v_0 = -1 - 2 = -3$

$$\begin{aligned}
 t_{n+1} &= u_{n+1} + \frac{5}{2}v_{n+1} \\
 &= \frac{u_n + v_n}{2} + \frac{5}{2} \times \frac{u_n + 4v_n}{5} \\
 &= \frac{u_n + v_n}{2} + \frac{u_n + 4v_n}{2} \\
 &= \frac{u_n + v_n + u_n + 4v_n}{2} \\
 &= \frac{2u_n + 5v_n}{2} \\
 &= u_n + \frac{5}{2}v_n \\
 &= t_n
 \end{aligned}$$

La suite (t_n) est constante

3. (s_n) est la suite géométrique de raison $\frac{3}{10}$ et de premier terme $s_0 = -3$.

Ainsi $\forall n \in \mathbb{N}, s_n = -3 \times \left(\frac{3}{10}\right)^n$

De plus, (t_n) est constante et $t_0 = u_0 + \frac{5}{2}v_0 = -1 + \frac{5}{2} \times 2 = -1 + 5 = 4$.

Donc : $\forall n \in \mathbb{N}, t_n = 4$

4. Montrons que les suites sont adjacentes. Remarquons que nous savons que :

- (u_n) est croissante et (v_n) est décroissante
- $u_n < v_n$ pour tout n (admis)

Il reste à montrer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} (v_n - u_n) = 0$.

Or $v_n - u_n = -s_n = 3 \times \left(\frac{3}{10}\right)^n$.

Comme $-1 < \frac{3}{10} < 1$, alors : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{3}{10}\right)^n = 0$

Donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} -s_n = 0$, et donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} (v_n - u_n) = 0$.

Les suites (u_n) et (v_n) sont adjacentes.

5. Du système :
$$\begin{cases} u_n - v_n = s_n \\ u_n + \frac{5}{2}v_n = t_n = 4 \end{cases}$$

On tire $u_n + \frac{5}{2}v_n = 4$ et $u_n = v_n + s_n$

Donc

$$\begin{aligned} (v_n + s_n) + \frac{5}{2}v_n &= 4 \text{ i.e. } v_n + s_n + \frac{5}{2}v_n = 4 \\ \text{i.e. } \frac{7}{2}v_n &= 4 - s_n \\ \text{i.e. } v_n &= \frac{8 - 2s_n}{7} \end{aligned}$$

Comme $\lim_{n \rightarrow +\infty} s_n = 0$, on obtient $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = \frac{8}{7}$

Et comme les suites sont adjacentes, elles convergent vers la même limite, et donc

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \frac{8}{7}.$$

Donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = \frac{8}{7}$

Bonus : convergence d'une somme**Hors barème**

Calculer la limite (si elle existe) de la suite (s_n) définie par

$$\forall n \in \mathbb{N}, s_n = \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k^3}$$

Justifier. **Indice** : on pourra utiliser un encadrement judicieux...

Solution: Soit $s_n = \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k^3}$.

Pour étudier la convergence de cette suite, nous allons utiliser un encadrement.

Comme la fonction $f(x) = \frac{1}{x^3}$ est décroissante sur $[1; +\infty[$, nous pouvons encadrer chaque terme de la somme.

$$\text{Pour tout } k \text{ tel que } n+1 \leq k \leq 2n : \frac{1}{(2n)^3} \leq \frac{1}{k^3} \leq \frac{1}{(n+1)^3}$$

La somme s_n contient $(2n) - (n+1) + 1 = n$ termes.

Donc :

$$n \times \frac{1}{(2n)^3} \leq s_n \leq n \times \frac{1}{(n+1)^3}$$

i.e. :

$$\frac{n}{8n^3} \leq s_n \leq \frac{n}{(n+1)^3}$$

Ce qui donne :

$$\frac{1}{8n^2} \leq s_n \leq \frac{n}{(n+1)^3}$$

Or, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{8n^2} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n}{(n+1)^3} = 0$. D'après le théorème des gendarmes, on en conclut

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} s_n = 0$$