

Devoir sur table n°1

Jeudi 25 septembre 2025 - 1 h 50 min

L'utilisation d'une calculatrice est autorisée.
La qualité de la rédaction et la précision des raisonnements entreront
pour une part importante dans l'appréciation de la copie.

Exercice 1 : Questions de cours

(8 points)

Partie A : Primitives

(4 points)

Déterminer l'ensemble des primitives des fonctions suivants sur l'intervalle I

- $f(x) = \frac{1}{3x+1}$ sur $I = [0; +\infty[$
- $g(x) = \frac{x}{(x^2+3)^3}$ sur $I = \mathbb{R}$
- $h(x) = \sin(x) e^{-\cos(x)}$ sur $I = \mathbb{R}$
- $j(x) = \frac{1}{\cos^2(x) \sqrt{\tan(x)}}$ sur $I = \left]0; \frac{\pi}{2}\right[$

Partie B : Logarithme

(4 points)

1. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation et l'inéquation suivantes :

$$(I) : 2 \ln(4-x) + 4 \leq 0$$

$$(E) : 2 (\ln x)^2 - \ln x - 1 = 0$$

2. Vrai ou faux ? Justifier.

$$\ln(\sqrt{e}) + \frac{\ln(e^3)}{\ln(e^2)} = \frac{e^{\ln 2 - \ln 3}}{e^{\ln 4 - \ln 3}}$$

Solution: Partie A : Primitives

Chacune des fonctions données est continue sur l'intervalle I considéré donc admet des primitives sur I .

1. Soit f la fonction définie sur $I = [0; +\infty[$ par $f(x) = \frac{1}{3x+1}$.

Pour tout x de I , on pose $u(x) = 3x + 1$. Donc pour tout x de I , $u'(x) = 3$, donc $f(x) = \frac{1}{3} \times \frac{u'(x)}{u(x)}$, donc les primitives de f sur I sont les fonctions $F = \frac{1}{3} \ln |u| + k$, $k \in \mathbb{R}$.

Or, pour tout $x \in I$, $u(x) = 3x + 1 \geq 1 > 0$. Ainsi

$$F(x) = \frac{1}{3} \ln(3x + 1) + k, \quad k \in \mathbb{R}.$$

2. Soit g la fonction définie sur $I = \mathbb{R}$ par $g(x) = \frac{x}{(x^2 + 3)^3}$.

Pour tout x de I , on pose $u(x) = x^2 + 3$. Donc pour tout x de I , $u'(x) = 2x$, donc $g(x) = \frac{1}{2} \times \frac{u'(x)}{u(x)^3}$, donc les primitives de g sur I sont les fonctions

$$G = \frac{1}{2} \times \left(-\frac{1}{2u^2} \right) + k = -\frac{1}{4u^2} + k, \quad k \in \mathbb{R},$$

donc définies, pour tout $x \in I$, par :

$$G(x) = -\frac{1}{4(x^2 + 3)^2} + k, \quad k \in \mathbb{R}.$$

3. Soit h la fonction définie sur $I = \mathbb{R}$ par $h(x) = \sin(x)e^{-\cos(x)}$.

Pour tout $x \in I$, on pose $u(x) = -\cos(x)$. Donc pour tout x appartenant à I , $u'(x) = \sin(x)$, donc $h(x) = u'(x) \times e^{u(x)}$, donc les primitives de h sur I sont les fonctions

$$H = e^u + k, \quad k \in \mathbb{R},$$

donc, pour tout $x \in I$, par :

$$H(x) = e^{-\cos(x)} + k, \quad k \in \mathbb{R}.$$

4. Soit j la fonction définie sur $I =]0; \frac{\pi}{2}[$ par $j(x) = \frac{1}{\cos^2(x)\sqrt{\tan(x)}}$.

On peut réécrire $j(x) = \frac{1}{\cos^2(x)} \times \frac{1}{\sqrt{\tan(x)}} = \frac{1}{\cos^2(x)} \times (\tan(x))^{-1/2}$.

Pour tout x de I , on pose $u(x) = \tan(x)$. Donc pour tout x de I , $u'(x) = \frac{1}{\cos^2(x)}$, donc $j(x) = u'(x) \times u(x)^{-1/2}$, donc les primitives de j sur I sont les fonctions

$$J = \frac{u^{1/2}}{1/2} + k = 2u^{1/2} + k, \quad k \in \mathbb{R},$$

c'est-à-dire définies, pour tout $x \in I$, par :

$$J(x) = 2\sqrt{\tan(x)} + k, \quad k \in \mathbb{R}.$$

Partie B : Logarithme

1. Résolvons les équations et inéquations :

Inéquation (I) : $2\ln(4-x) + 4 \leq 0$

Domaine de définition : il faut que $4-x > 0$, c'est-à-dire $x < 4$. Donc on résout sur $] -\infty ; 4[$.

$$\begin{aligned} 2\ln(4-x) + 4 \leq 0 &\Leftrightarrow 2\ln(4-x) \leq -4 \\ &\Leftrightarrow \ln(4-x) \leq -2 \\ &\Leftrightarrow 4-x \leq e^{-2} \\ &\Leftrightarrow x \geq 4 - e^{-2} \end{aligned}$$

En tenant compte du domaine de définition, on obtient :

$$S_I = [4 - e^{-2} ; 4[$$

Équation (E) : $2(\ln x)^2 - \ln x - 1 = 0$

Domaine de définition : $x > 0$. Donc on résout sur $\mathbb{R}_+^*$.

Posons $X = \ln x$. L'équation devient : $2X^2 - X - 1 = 0$

Le discriminant associé à cette équation est

$$\begin{aligned} \Delta &= (-1)^2 - 4 \times 2 \times (-1) \\ &= 1 + 8 \\ &= 9 \\ &> 0 \end{aligned}$$

Les solutions sont

$$X_1 = \frac{1+3}{4} = 1 \text{ et } X_2 = \frac{1-3}{4} = -\frac{1}{2}$$

Or,

- $X_1 = 1$ si et seulement si $\ln(x_1) = 1$, i.e. $x_1 = e$
- $X_2 = -\frac{1}{2}$ si et seulement si $x_2 = e^{-\frac{1}{2}}$, i.e. $x_2 = \frac{1}{\sqrt{e}}$

Donc

$$S_E = \left\{ \frac{1}{\sqrt{e}} ; e \right\}$$

2. Vérifions l'égalité en calcul séparément les quantités :

Membre de gauche :

$$\begin{aligned}\ln(\sqrt{e}) + \frac{\ln(e^3)}{\ln(e^2)} &= \ln(e^{1/2}) + \frac{3\ln(e)}{2\ln(e)} \\ &= \frac{1}{2} + \frac{3}{2} \\ &= 2\end{aligned}$$

Membre de droite :

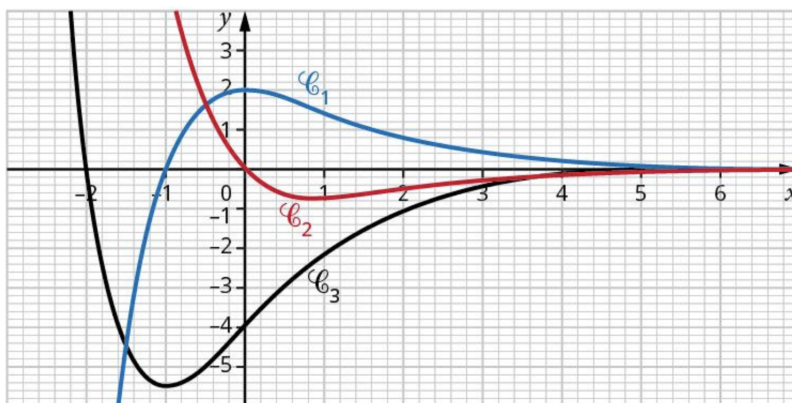
$$\begin{aligned}\frac{e^{\ln 2 - \ln 3}}{e^{\ln 4 - \ln 3}} &= \frac{e^{\ln(2/3)}}{e^{\ln(4/3)}} \\ &= \frac{2}{4} \\ &= \frac{1}{2} \\ &= \frac{2}{3} \times \frac{3}{4} \\ &= \frac{1}{2}\end{aligned}$$

Puisque $2 \neq \frac{1}{2}$, l'égalité est **fausse**.

Exercice 2 : Primitive et représentation graphique

(2 points)

Dans le repère ci-dessous, trois courbes $\mathcal{C}_1$, $\mathcal{C}_2$ et $\mathcal{C}_3$ sont tracées. L'une d'elles est la courbe représentative d'une fonction f définie sur $\mathbb{R}$, une autre représente une primitive de f , notée F , et la troisième représente une primitive de F .



Associer à chaque courbe sa fonction. Justifier sur la copie.

Solution: Les fonctions sont continues donc elles admettent des primitives. $\mathcal{C}_3$ est la courbe représentative d'une fonction décroissante sur $[-2; -1]$ et $\mathcal{C}_1$ est la courbe représentative d'une fonction négative sur cet intervalle. De plus, $\mathcal{C}_2$ est au-dessus de l'axe des abscisses sur cet intervalle. Donc $\mathcal{C}_1$ est la courbe représentative de la dérivée

de la fonction représentée par $\mathcal{C}_3$. De plus, $\mathcal{C}_1$ est la représentation d'une fonction croissante sur $[-1; 0]$, sur lequel la fonction représentée par $\mathcal{C}_2$ est positive. Donc $\mathcal{C}_2$ est la courbe représentative de la dérivée de la fonction représentée par $\mathcal{C}_1$.

Donc

- La primitive de F est associée à la courbe $\mathcal{C}_3$.
- La fonction F est associée à la courbe $\mathcal{C}_1$.
- La fonction f est associée à la courbe $\mathcal{C}_2$.

Exercice 3 : Recherche de primitive

(4 points)

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $I =]1; +\infty[$ par

$$f(x) = \frac{-3x^2 + 6x - 2}{(x-1)^2}$$

1. Déterminer deux réels a et b tels que, pour tout réel x de l'intervalle I , on ait :

$$f(x) = a + \frac{b}{(x-1)^2}$$

2. Calculer la dérivée de la fonction g définie sur I par :

$$\forall x \in I, g(x) = \frac{2x-3}{x-1}$$

3. En déduire les primitives de la fonction f sur I .
4. Déterminer la primitive F de la fonction f sur I qui prend la valeur -1 en 2.

Solution:

1. Soit $(a; b) \in \mathbb{R}^2$. On a

$$\begin{aligned} a + \frac{b}{(x-1)^2} &= \frac{a(x-1)^2 + b}{(x-1)^2} \\ &= \frac{ax^2 - 2ax + a + b}{(x-1)^2} \end{aligned}$$

$$\text{Par identification : } \begin{cases} -3 = a \\ 6 = -2a \\ -2 = a + b \end{cases}$$

Donc $a = -3$. Vérifions avec la deuxième : $6 = -2 \times (-3) = 6$ Grâce à la troisième équation $-2 = -3 + b \Rightarrow b = -2 + 3 = 1$

Donc : $a = -3$ et $b = 1$. Ainsi

$$f(x) = -3 + \frac{1}{(x-1)^2}$$

2. g est dérivable sur I en tant que quotient de fonctions dérivables sur I dont le dénominateur ne s'annule pas sur I .

$$\begin{aligned}\forall x \in I, g'(x) &= \frac{2 \times (x-1) - (2x-3) \times 1}{(x-1)^2} \\ &= \frac{2x-2-2x+3}{(x-1)^2} \\ &= \frac{1}{(x-1)^2}\end{aligned}$$

Donc : $g'(x) = \frac{1}{(x-1)^2}$

3. D'après la question 1, nous avons : $f(x) = -3 + \frac{1}{(x-1)^2}$

D'après la question 2, nous savons que $g'(x) = \frac{1}{(x-1)^2}$, donc g est une primitive de $x \mapsto \frac{1}{(x-1)^2}$ sur I .

Nous pouvons donc écrire :

$$\begin{aligned}f(x) &= -3 + \frac{1}{(x-1)^2} \\ &= -3 + g'(x)\end{aligned}$$

Les primitives de f sur I sont donc de la forme :

$$\begin{aligned}F(x) &= -3x + g(x) + C \\ &= -3x + \frac{2x-3}{x-1} + C\end{aligned}$$

où C est une constante réelle quelconque.

4. Nous cherchons la primitive F telle que $F(2) = -1$.

Calculons $F(2)$:

$$\begin{aligned}F(2) &= -3 \times 2 + \frac{2 \times 2 - 3}{2 - 1} + C \\ &= -6 + \frac{4-3}{1} + C \\ &= -6 + \frac{1}{1} + C \\ &= -6 + 1 + C \\ &= -5 + C\end{aligned}$$

Puisque $F(2) = -1$, nous avons :

$$-5 + C = -1 \Rightarrow C = -1 + 5 = 4$$

La primitive F cherchée est :

$$F(x) = -3x + \frac{2x-3}{x-1} + 4$$

Exercice 4 : Étude de fonctions**(6 points)**

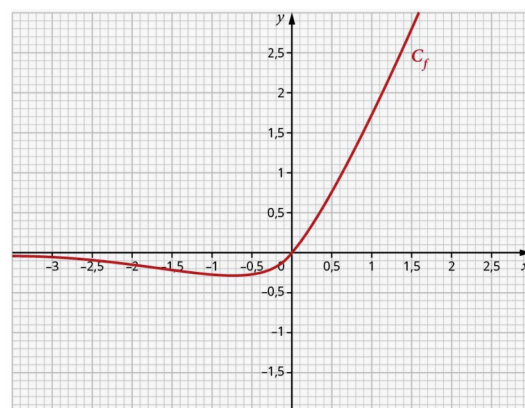
On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \ln(e^{2x} - e^x + 1)$$

On note $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative, représentée ci-contre.

Un élève formule les conjectures suivantes à partir de cette représentation graphique :

1. L'équation $f(x) = 2$ semble admettre au moins une solution.
2. Le plus grand intervalle sur lequel la fonction f semble être croissante est $\left[-\frac{1}{2}; +\infty\right[$.
3. L'équation de la tangente au point d'abscisse $x = 0$ semble être : $y = \frac{3}{2}x$.



Le but de cet exercice est de valider ou rejeter les conjectures concernant la fonction f .

Partie A : Étude d'une fonction auxiliaire

On définit la fonction g par, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $g(x) = e^{2x} - e^x + 1$

1. Déterminer $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x)$.
2. Montrer que $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty$.
3. Montrer que $g'(x) = e^x(2e^x - 1)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
4. Dresser le tableau de variations de la fonction g sur $\mathbb{R}$ en y faisant figurer la valeur exacte des extremums s'il y en a, ainsi que les limites de g en $-\infty$ et $+\infty$.
5. En déduire le signe de g sur $\mathbb{R}$.

Partie B

1. Justifier que la fonction f est bien définie sur $\mathbb{R}$.
2. Calculer $f'(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
3. Déterminer une équation de la tangente à la courbe au point d'abscisse 0.
4. Montrer que la fonction f est strictement croissante sur $[-\ln(2); +\infty[$.
5. Montrer que l'équation $f(x) = 2$ admet une unique solution α sur $[-\ln(2); +\infty[$ et déterminer une valeur approchée de α à 10^{-2} près.

Partie C

À l'aide des résultats de la partie B, indiquer, pour chaque conjecture de l'élève, si elle est vraie ou fausse. Justifier.

Solution:**Partie A : Étude d'une fonction auxiliaire**

On définit sur $\mathbb{R}$ la fonction g définie par

$$g(x) = e^{2x} - e^x + 1$$

1. On a $\lim_{x \rightarrow -\infty} 2x = -\infty$ et $\lim_{X \rightarrow -\infty} e^X = 0$. Donc $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^{2x} = 0$.

D'autre part $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$, donc par somme de limites $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = 1$.

2. On peut écrire, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $g(x) = e^x(e^x - 1 + e^{-x})$.

Comme $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x} = 0$, on a par limite de somme,

$\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x - 1 + e^{-x} = +\infty$ et enfin par limite de produit, $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty$.

3. g est une somme de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ et est donc dérivable sur cet intervalle.

$$\begin{aligned} \forall x \in \mathbb{R}, g'(x) &= 2e^{2x} - e^x \\ &= e^x(2e^x - 1) \end{aligned}$$

4. D'après la question précédente comme $e^x > 0$, quel que soit le réel x , le signe de $g'(x)$ est celui de $2e^x - 1$. Or,

$$\begin{aligned} 2e^x - 1 > 0 &\Leftrightarrow 2e^x > 1 \\ &\Leftrightarrow e^x > \frac{1}{2} \\ &\Leftrightarrow x > \ln \frac{1}{2} \\ &\Leftrightarrow x > -\ln 2 \end{aligned}$$

où la deuxième équivalence est obtenue grâce à la croissance de la fonction logarithme népérien.

La fonction g est donc décroissante sur $] -\infty; -\ln 2[$ et croissante sur $] -\ln 2; +\infty[$.
Enfin,

$$\begin{aligned} g(-\ln 2) &= e^{-2 \ln 2} - e^{-\ln 2} + 1 \\ &= \frac{1}{e^{2 \ln 2}} - \frac{1}{e^{\ln 2}} + 1 \\ &= \frac{1}{e^{\ln 4}} - \frac{1}{e^{\ln 2}} + 1 \\ &= \frac{1}{4} - \frac{1}{2} + 1 \\ &= \frac{3}{4} \end{aligned}$$

Donc $\frac{3}{4}$ est le minimum de la fonction g sur $\mathbb{R}$.

D'où le tableau de variations :

x	$-\infty$	$-\ln 2$	$+\infty$
$g'(x)$	$-$	0	$+$
g	1	$\frac{3}{4}$	$+\infty$

5. Le minimum de la fonction g est supérieur à zéro, donc quel que soit $x \in \mathbb{R}$, $g(x) > 0$.

Partie B

1. Quel que soit $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = \ln g(x)$.

Or on a vu dans la partie précédente que $g(x) > 0$, donc f est définie sur $\mathbb{R}$.

2. $f(x) = \ln g(x)$, f est dérivable en tant que composée de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$.
On obtient

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{g'(x)}{g(x)} \\ &= \frac{2e^{2x} - e^x}{e^{2x} - e^x + 1} \end{aligned}$$

3. Soit $\mathcal{T}_0$ la tangente au point d'abscisse 0 :

On sait que $M(x; y) \in \mathcal{T}_0 \Leftrightarrow y = f'(0)(x - 0) + f(0)$

- $f(0) = \ln(1 - 1 + 1) = \ln 1 = 0$
- $f'(0) = \frac{2 - 1}{1 - 1 + 1} = 1$

Donc l'équation de la tangente cherchée est $y = 1(x - 0) + 0$, c'est-à-dire $y = x$.

4. On a vu que

$$f'(x) = \frac{2e^{2x} - e^x}{e^{2x} - e^x + 1} = \frac{g'(x)}{g(x)}$$

et dans la partie A que le dénominateur $g(x) > 0$; le signe de $f'(x)$ est donc celui de $g'(x)$ étudié dans la partie A.

Donc $f'(x) < 0$ sur $] -\infty; -\ln 2[$, d'où la fonction f est décroissante sur cet intervalle et $f'(x) > 0$ sur $] -\ln 2; +\infty[$, d'où la fonction f est croissante sur cet intervalle.

- 5.
- $f(-\ln 2) = \ln g(-\ln 2) = \ln \frac{3}{4} \approx -0,29$;
 - On a vu que $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty$, donc par composition $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln g(x) = +\infty$.
 - La fonction f est continue car dérivable sur $] -\ln 2; +\infty[$,
 - f est strictement croissante sur cet intervalle
 - $f(]-\ln 2; +\infty[) =]\ln \frac{3}{4}; +\infty[$ et $2 \in f(]-\ln 2; +\infty[)$.

D'après le théorème de la bijection, il existe un réel unique $\alpha \in]-\ln 2; +\infty[$ tel que $f(\alpha) = 2$.

La calculatrice donne :

$$\begin{aligned} f(1) &\approx 1,7 \text{ et } f(2) \approx 3,8, \text{ donc } 1 < \alpha < 2; \\ f(1,1) &\approx 1,9 \text{ et } f(1,2) \approx 2,2, \text{ donc } 1,1 < \alpha < 1,2; \\ f(1,12) &\approx 1,99 \text{ et } f(1,13) \approx 2,01, \text{ donc } 1,12 < \alpha < 1,13. \end{aligned}$$

Partie C

Conjecture 1 : d'après le résultat précédent elle est vraie ;

Conjecture 2 : elle est fausse f est croissante sur $] -\ln 2; +\infty[$;

Conjecture 3 : on a vu que l'équation de cette tangente est $y = x$: la conjecture est fausse.

Exercice 5 (si le reste du contrôle a été traité) :**(Hors barème)**

Le but de cet exercice est de démontrer que $\log_{10}(2)$ est irrationnel, c'est-à-dire qu'il ne peut pas s'écrire sous forme de fraction.

Recopier sur la copie et compléter la démonstration suivante :

« On raisonne ... et on suppose ainsi qu'il existe $(p; q) \in (\mathbb{N}^*)^2$ tel que : $\log_{10}(2) = \frac{p}{q}$, notée (*)

Grâce aux propriétés du logarithme, on obtient

$$\begin{aligned}
 (*) &\iff \dots = \dots \\
 &\iff \dots = \dots \\
 &\iff \dots = \dots \\
 &\iff 2^p \times 5^p = 2^q
 \end{aligned}$$

Par unicité du développement en facteurs premiers, on obtient nécessairement que $p = \dots$, et donc ..., ce qui est une contradiction avec (*).

Donc $\log_{10}(2)$ est irrationnel. »

Solution: On raisonne **par l'absurde** et on suppose ainsi qu'il existe $(p; q) \in (\mathbb{N}^*)^2$ tel que : $\log_{10}(2) = \frac{p}{q}$, notée (*)

Grâce aux propriétés du logarithme, on obtient

$$\begin{aligned}
 (*) &\iff \log_{10}(2) = \frac{p}{q} \\
 &\iff 10^{\frac{p}{q}} = 2 \\
 &\iff (10^{\frac{p}{q}})^q = 2^q \\
 &\iff 10^p = 2^q \\
 &\iff (2 \times 5)^p = 2^q \\
 &\iff 2^p \times 5^p = 2^q
 \end{aligned}$$

Par unicité du développement en facteurs premiers, on obtient nécessairement que $p = q$, et donc $5^p = 1$, ce qui est une contradiction avec (*).

Donc $\log_{10}(2)$ est irrationnel.