



Correction :



LIVRET D'EXERCICES POUR PRÉPARER LE SUPÉRIEUR

Terminale SMP 2

Été 2026

Ce livret est une compilation d'exercices avec les corrections, dans le but de préparer votre entrée dans le supérieur.

Comme toujours, ce livret peut comporter des erreurs (j'espère le moins possible). Vous pouvez m'écrire pour me faire part de vos interrogations, si vous travaillez sur ces sujets avant la rentrée : je ne disparaîs pas !

Certains exercices vous sembleront simples, car vous avez acquis de solides réflexes. D'autres vous paraîtront plus difficiles, et ce sera une bonne occasion de préparer la rentrée... vous retrouverez vos réflexes ! Ces exercices sont d'un niveau supérieur à ceux que je vous ai donnés dans l'année de terminale. Les exercices sont pensées comme cinq séances de recherche.

Ce livret ne se substitue pas à des exercices qui pourraient vous être donnés par les écoles dans lesquelles vous serez acceptés. Il a simplement vocation à vous faire retrouver le chemin des mathématiques, après un été que je vous souhaite **reposant**.

La route des mathématiques est longue, vous allez découvrir de magnifiques sujets. Souvenez-vous du chemin parcouru, des moments d'interrogation face à un exercice, des astuces qui vous ont fascinés, des sujets qui vous ont paru obscurs et qui se sont peu à peu éclairés : c'est ça, apprendre, découvrir, voyager, rêver. Transmettez cette beauté des mathématiques autour de vous, le monde n'en sera que plus beau !

Un utopiste anonyme...
Sacha Dhénin

Divers exercices pour se remuscler les méninges avant d'entrer dans le supérieur...

Exercice 1

Montrer que $\sqrt{3} + \sqrt{2}$ est un nombre irrationnel.

Exercice 2

- Montrer qu'une fonction f (définie sur $\mathbb{R}$) dérivable et paire si et seulement si f' est impaire.
- A-t-on aussi : une fonction f est dérivable et impaire si et seulement si f' est paire ?

Exercice 3

Montrer que la courbe d'équation $y = \frac{e^x}{e^x + 1}$ admet un centre de symétrie, à déterminer.

Exercice 4

Déterminer $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt[3]{x^3 + x^2} - x)$.

Exercice 5

Pour tout entier $p > 1$, on définit l'entier $4 \dots 48 \dots 89$, composé de p chiffres 4, $p - 1$ chiffres 8 et d'un chiffre 9. Montrer que ce nombre est toujours un carré parfait.

Exercice 6

Pour tout réel $a \in]0, \pi[$, déterminer la forme algébrique de $\frac{1 + e^{ia}}{1 - e^{ia}}$.

Exercice 7

La fonction tangente, définie sur $\left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[$, est bijective, et sa fonction réciproque est notée « arctan ».

a) Que vaut $\cos(\arctan(x))$ pour tout réel x ?

b) Montrer que, pour tout $x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$,

$$\int_0^{\tan x} \frac{1}{1+t^2} dt = x$$

c) Par ailleurs, on montre que arctan est dérivable et, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\arctan'(x) = \frac{1}{1+x^2}$$

Déterminer, pour $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $\arctan(x) + \arctan\left(\frac{1}{x}\right)$.

d) Déterminer une primitive de la fonction arctan.

Exercice 8

Soient a et b deux réels tels que $a < b$. Calculer $\int_a^b \sqrt{(x-a)(b-x)} \, dx$.

Exercice 9

On considère les deux suites $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

- Montrer l'inégalité de Cauchy-Schwarz :

$$\left(\sum_{k=0}^n (a_k b_k) \right)^2 \leq \sum_{k=1}^n (a_k)^2 \times \sum_{k=0}^n (b_k)^2$$

- En déduire l'inégalité de Minkowski :

$$\sqrt{\sum_{k=0}^n (a_k + b_k)^2} \leq \sqrt{\sum_{k=1}^n (a_k)^2} + \sqrt{\sum_{k=0}^n (b_k)^2}$$

Exercice 10

On considère la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par :

$$u_0 = 2, u_1 = 7 \text{ et, pour tout entier } n \text{ positif, } u_{n+2} = 7u_{n+1} - 12u_n.$$

Étudier les suites $v = (u_{n+1} - 3u_n)$ et $w = (u_{n+1} - 4u_n)$ pour déterminer u_n en fonction de n .

Exercice 11

On considère l'équation

$$(E) : x^4 + 2x^3 + 3x^2 + 2x + 1 = 0$$

Déterminer une équation dont $y = x + \frac{1}{x}$ est solution et en déduire la résolution de (E) .

Exercice 12

Déterminer $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{E(x)}{x}$, où $E(x)$ est la partie entière de x .

Exercice 13

Pour tout réel x , on pose

$$f(x) = \frac{x}{1 + |x|}$$

Déterminer son ensemble-image, puis montrer que f est bijective. Enfin expliciter sa fonction réciproque.

Exercice 14

Soient a et b deux réels tels que $a < b$ et f une fonction dérivable sur $[a; b]$.

On suppose que f' est bornée entre m et M . Montrer qu'alors

$$m \leq \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \leq M$$

Exercice 15

Le *plus petit multiple commun* (positif) de deux entiers a et b , noté $PPCM(a, b)$ vérifie

$$PGCD(a, b) \times PPCM(a, b) = ab$$

Résoudre alors le système $\begin{cases} PGCD(a, b) = a - b & (1) \\ PPCM(a, b) = 72 & (2) \end{cases}$

Exercice 16

Soit $\alpha \in \left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[$. Résoudre l'équation

$$\left(\frac{1 + iz}{1 - iz} \right)^3 = \frac{1 + i \tan \alpha}{1 - i \tan \alpha} \quad (E)$$

Exercice 17

Pour tout couple (a, b) de réels, on note $\max(a, b)$ le plus grand des deux nombres a et b .

Étudier la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \int_0^1 \max(x, t) \, dt$$

Exercice 18

On considère la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $\begin{cases} u_0 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \frac{u_n + 6}{u_n + 2} \end{cases}$

Étudier la suite $v = \left(\frac{u_n - 2}{u_n + 3} \right)$ pour déterminer l'expression générale de u_n en fonction de n .

Exercice 19

Soit un entier $n > 1$.

Exprimer autrement $A_n = \prod_{k=2}^n \left(1 - \frac{1}{k^2} \right)$ pour en déterminer la limite quand n tend vers l'infini.

Exercice 20

a) Montrer que l'équation $3 \sin x + 4 \cos x = 2$ peut s'écrire sous la forme $a \sin(x + b) = c$.

b) Résoudre alors l'équation.

Exercice 21

On note a , b et c les trois solutions de l'équation $x^3 + 2x - 1 = 0$. Calculer $a^3 + b^3 + c^3$.

Exercice 22

Soit f une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ vérifiant $f(f(x)) = \frac{x}{2} + 3$.

Exprimer $f\left(\frac{x}{2} + 3\right)$ en fonction de $f(x)$ et en déduire que f est une fonction affine.

Exercice 23

Montrer que toute fonction est la somme, d'une unique façon, d'une fonction paire et d'une fonction impaire.

Exercice 24

Si a est un réel strictement positif et b un réel quelconque, on définit « a puissance b » par $a^b = e^{b \ln a}$.

Déterminer $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(1,0001)^x}{x^{2020}}$.

Exercice 25

Montrer que la somme de cinq carrés parfaits d'entiers consécutifs n'est jamais un carré parfait.

Exercice 26

Soit un entier $n > 0$.

- Déterminer, dans $\mathbb{C}$, les racines n -ièmes de 1, i.e. les solutions de l'équation $z^n = 1$.
- Calculer alors le produit de ces racines n -ièmes.
- Résoudre l'équation $(z - i)^n = (z + i)^n$.

Exercice 27

- Déterminer les nombres complexes z non nuls tels que $z' = z + \frac{1}{z}$ soit un réel.
- Déterminer les nombres complexes z non nuls tels que $z' = z + \frac{1}{z}$ soit un imaginaire pur.

Exercice 28

Soient a et b deux réels tels que $a < b$ et soit f et g deux fonctions continues sur $[a; b]$. Montrer alors l'inégalité de Cauchy-Schwarz sur les intégrales :

$$\left(\int_a^b f(t)g(t) dt \right)^2 \leq \left(\int_a^b f^2(t) dt \right) \left(\int_a^b g^2(t) dt \right)$$

Exercice 29

Pour tout entier $n > 0$, on sait que $S_1 = \sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2}$ et que $S_2 = \sum_{k=1}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

Exprimer $S_4 = \sum_{h=0}^{n-1} (h+1)^4$ de deux façons pour déterminer $S_3 = \sum_{k=1}^n k^3$.

Exercice 30

Montrer que pour tout réel x et tout entier naturel n , $|\sin(nx)| \leq n |\sin x|$.

Exercice 31

Soient a , b , c et d quatre nombres rationnels tels que $a + b\sqrt{2} = c + d\sqrt{2}$. Montrer que $a = c$ et $b = d$.

Exercice 32

Déterminer une équation du troisième degré à coefficients entiers dont $\sqrt[3]{20 + 12\sqrt{2}} + \sqrt[3]{20 - 14\sqrt{2}}$ est solution, pour en déduire la valeur numérique.

Exercice 33

Soit un réel $c > 0$. Pour tout réel x , on pose

$$f(x) = \frac{x}{\sqrt{1 + cx^2}}$$

On note f^n la composée de n fois la fonction f . Exprimer $f^n(x)$ en fonction de n et x .

Exercice 34

Pour tout réel $a > 0$ et différent de 1, on appelle « logarithme de base a » la fonction, notée $\log_a$ définie par

$$\forall x > 0, \log_a(x) = \frac{\ln x}{\ln a}$$

Pour $a = 10$, on note simplement $\log$ le logarithme en base 10, appelé *logarithme décimal*.

On rappelle aussi que si a est un réel strictement positif et b un réel quelconque, on définit $a^b = e^{b \ln a}$.

- Montrer que, pour a , b et c tels que cette égalité ait un sens, $a^{\log_b(x)} = c^{\log_b(a)}$.
- En déduire la résolution de l'équation $5^{\log(x)} = 50 - x^{\log(5)}$.

Exercice 35

Montrer que $\frac{\ln 3}{\ln 2}$ est un nombre irrationnel.

Exercice 36

Pour n entier positif, on définit les *nombre de Fermat* comme les entiers de la forme

$$F_n = 2^{(2^n)} + 1$$

Montrer qu'ils sont tous deux à deux premiers entre eux.

Exercice 37

Déterminer les racines carrées dans $\mathbb{C}$ de $-16 + 30i$.

Exercice 38

Pour tout x réel, on pose $f(x) = e^{-x^2} \int_0^x e^{t^2} dt$.

Montrer que f est une fonction impaire et que $f'(x) + 2xf(x) = 1$.



Exercice 39

Montrer l'identité de Catalan :

$$\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}, \sum_{k=0}^{2n-1} \frac{(-1)^k}{k+1} = \sum_{k=1}^{2n} \frac{1}{k}$$



Exercice 40

Soit x un réel de l'intervalle $]0, \pi[$ et soit un entier n strictement supérieur à 1.

Exprimer autrement $P_n(x) = \prod_{k=1}^n \cos\left(\frac{x}{2^k}\right)$ pour en déterminer, en fonction de x , la limite quand n tend vers l'infini.

En déduire $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\sum_{k=1}^n \ln \left(\cos \left(\frac{x}{2^k} \right) \right) \right)$.



Exercice 41

Résoudre l'équation

$$4^x + 10^x = 25^x \quad (\text{E})$$



Exercice 42

Pour tout réel x différent de 1, on pose $f(x) = \frac{x^3 + x^2 + x + 5}{(x-1)^2(x^2+1)}$

a) Montrer qu'il existe trois réels a , b et c tels que $f(x)$ peut aussi s'écrire

$$\frac{a}{x-1} + \frac{b}{(x-1)^2} + \frac{cx}{x^2+1}$$

b) En déduire la primitive de f qui s'annule en 0.



Exercice 43

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$\forall x \neq 0, f(x) = x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) \text{ et } f(0) = 0$$

a) Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}$. Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et calculer $f'(x)$ pour tout x non nul.

b) Montrer que f est dérivable en 0 et donner la valeur de $f'(0)$.

c) Que peut-on dire de la limite de $f'(x)$ quand x tend vers 0 ?



Exercice 44

Pour tout réel $x \neq 0$, on pose $f(x) = \frac{1}{x}$. On note $f^{(n)}$ la dérivée n -ième de f .

Exprimer $f^{(n)}(x)$ en fonction de n et de x .

Exercice 45

Déterminer le nombre de zéros qui terminent 1000 !

Exercice 46

Soient a et b deux nombres complexes tels que $|a| < 1$ et $|b| < 1$. Montrer que

$$\left| \frac{a-b}{1-\bar{a}b} \right| < 1$$

Exercice 47

Soient A , B et C trois points distincts du cercle trigonométrique, d'affixes respectives a , b et c .

Montrer que le point M d'affixe z appartient à la hauteur issue de C du triangle ABC si et seulement si

$$\bar{z} = \frac{z}{ab} + \frac{1}{c} - \frac{c}{ab}$$

Exercice 48

- a) Déterminer pour quelles valeurs de x , $F(x) = \int_x^{x^2} \frac{1}{\ln t} dt$ existe.
- b) Calculer la limite de $F(x)$ lorsque x tend vers 1.
- c) Calculer la dérivée de F .
- d) Déterminer la limite de $F'(x)$ quand x tend vers 1.

Exercice 49

On considère la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 0$ et, pour tout entier n positif,

$$u_{n+1} + u_n = n \quad (*)$$

Déterminer l'expression générale de u_n en fonction de n .

Exercice 50

Soit un entier $n > 1$. On pose $u_n = \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \dots + \sqrt{2}}}}$ (n radicaux).

Montrer que $u_n = 2 \cos \left(\frac{\pi}{2^{n+1}} \right)$ et que, si on pose $v_n = \prod_{k=1}^n u_k$, alors

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{v_n}{2^n} \right) = \frac{2}{\pi}$$

Exercice 51

Résoudre l'équation $x^4 - 21x + 8 = 0$ sachant que deux de ses solutions sont inverses l'une de l'autre.