

# Séquence XXVIII – Similitudes directes



## Exercice 1

Donner l'écriture complexe des similitudes directes suivantes (centre  $\Omega$  d'affixe  $\omega$ , de rapport  $k$  et d'angle  $\theta$ ) :

1.  $\omega = 1 + i$ ;  $k = 2$ ;  $\theta = \frac{\pi}{2}$
2.  $\omega = 0$ ;  $k = \sqrt{3}$ ;  $\theta = \frac{\pi}{3}$
3.  $\omega = 1 - 2i$ ;  $k = 2\sqrt{2}$ ;  $\theta = -\frac{\pi}{4}$

### Solution de l'exercice 1

L'écriture complexe d'une similitude directe de centre  $\Omega$  d'affixe  $\omega$ , de rapport  $k$  et d'angle  $\theta$  est :

$$z' = ke^{i\theta}(z - \omega) + \omega$$

1. Avec  $\omega = 1 + i$ ,  $k = 2$  et  $\theta = \frac{\pi}{2}$  :

$$\begin{aligned} z' &= 2e^{i\frac{\pi}{2}}(z - (1 + i)) + (1 + i) \\ &= 2i(z - 1 - i) + 1 + i \\ &= 2iz - 2i - 2i^2 + 1 + i \\ &= 2iz - 2i + 2 + 1 + i \\ &= 2iz - i + 3 \end{aligned}$$

2. Avec  $\omega = 0$ ,  $k = \sqrt{3}$  et  $\theta = \frac{\pi}{3}$  :

$$\begin{aligned} z' &= \sqrt{3}e^{i\frac{\pi}{3}}z \\ &= \sqrt{3}\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right)z \\ &= \sqrt{3}\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)z \\ &= \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{3}{2}\right)z \end{aligned}$$

3. Avec  $\omega = 1 - 2i$ ,  $k = 2\sqrt{2}$  et  $\theta = -\frac{\pi}{4}$  :

$$\begin{aligned} z' &= 2\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}(z - (1 - 2i)) + (1 - 2i) \\ &= 2\sqrt{2}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right)(z - 1 + 2i) + 1 - 2i \\ &= 2\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)(z - 1 + 2i) + 1 - 2i \\ &= 2(1 - i)(z - 1 + 2i) + 1 - 2i \\ &= (2 - 2i)(z - 1 + 2i) + 1 - 2i \\ &= (2 - 2i)z - (2 - 2i)(1 - 2i) + 1 - 2i \\ &= (2 - 2i)z - (2 - 4i - 2i + 2i^2) + 1 - 2i \\ &= (2 - 2i)z - (2 - 6i - 2) + 1 - 2i \\ &= (2 - 2i)z + 6i + 1 - 2i \\ &= (2 - 2i)z + 1 + 4i \end{aligned}$$



## Exercice 2

Étudier les transformations géométriques et préciser les éléments caractéristiques :

1.  $z' = z + 2 + i$
2.  $z' = -z + 2i$
3.  $z' = 3z - 2$
4.  $z' = \frac{1}{i}z$
5.  $z' = \frac{1 + i\sqrt{3}}{2}z$
6.  $z' = \frac{\sqrt{2}}{2}(1 + i)z$
7.  $z' = 2z + 1 - i$
8.  $z' - i = (\sqrt{3} + i)(z - i)$
9.  $z' = -2iz + 5$
10.  $z' = (3 + 4i)z - 4 - 8i$

### Solution de l'exercice 2

1.  $z' = z + 2 + i$

Il s'agit d'une **translation** de vecteur  $\vec{u}$  d'affixe  $2 + i$ .

2.  $z' = -z + 2i$

Il s'agit d'une **symétrie centrale** de centre  $\Omega$  d'affixe  $\omega$ .

On a  $z' = -z + 2i$ , donc  $z' + z = 2i$ , d'où  $\omega = i$ .

C'est la symétrie de centre  $\Omega$  d'affixe  $i$ .

3.  $z' = 3z - 2$

Il s'agit d'une **homothétie** de rapport  $k = 3$  et de centre  $\Omega$  d'affixe  $\omega$ .

On cherche le centre :  $\omega = 3\omega - 2$ , donc  $-2\omega = -2$ , d'où  $\omega = 1$ .

C'est l'homothétie de centre  $\Omega$  d'affixe 1 et de rapport 3.

4.  $z' = \frac{1}{i}z = \frac{1}{i} \times \frac{-i}{-i}z = \frac{-i}{1}z = -iz$

On a  $\frac{1}{i} = -i = e^{-i\frac{\pi}{2}}$ .

Il s'agit d'une **rotation** de centre  $O$  et d'angle  $-\frac{\pi}{2}$  (ou  $\frac{3\pi}{2}$ ).

5.  $z' = \frac{1 + i\sqrt{3}}{2}z$

Calculons le module et l'argument de  $\frac{1 + i\sqrt{3}}{2}$  :

$$\left|\frac{1 + i\sqrt{3}}{2}\right| = \frac{\sqrt{1^2 + (\sqrt{3})^2}}{2} = \frac{\sqrt{1 + 3}}{2} = \frac{2}{2} = 1$$

Donc  $\frac{1 + i\sqrt{3}}{2} = \cos\theta + i\sin\theta$  avec  $\cos\theta = \frac{1}{2}$  et  $\sin\theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$ , d'où  $\theta = \frac{\pi}{3}$ .

Il s'agit d'une **rotation** de centre  $O$  et d'angle  $\frac{\pi}{3}$ .

$$6. z' = \frac{\sqrt{2}}{2}(1+i)z$$

Calculons le module et l'argument de  $\frac{\sqrt{2}}{2}(1+i)$  :

$$\left| \frac{\sqrt{2}}{2}(1+i) \right| = \frac{\sqrt{2}}{2} \times |1+i| = \frac{\sqrt{2}}{2} \times \sqrt{2} = 1$$

Or  $1+i = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$ , donc :

$$\frac{\sqrt{2}}{2}(1+i) = \frac{\sqrt{2}}{2} \times \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}} = e^{i\frac{\pi}{4}}$$

Il s'agit d'une **rotation** de centre  $O$  et d'angle  $\frac{\pi}{4}$ .

$$7. z' = 2z + 1 - i$$

Il s'agit d'une **similitude directe** de rapport  $k = 2$  et d'angle  $\theta = 0$ .

C'est donc une homothétie de rapport 2 et de centre  $\Omega$  d'affixe  $\omega$ .

On cherche le centre :  $\omega = 2\omega + 1 - i$ , donc  $-\omega = 1 - i$ , d'où  $\omega = -1 + i$ .

C'est l'homothétie de centre  $\Omega$  d'affixe  $-1 + i$  et de rapport 2.

$$8. z' - i = (\sqrt{3} + i)(z - i)$$

Donc  $z' = (\sqrt{3} + i)(z - i) + i$ .

Calculons le module et l'argument de  $\sqrt{3} + i$  :

$$|\sqrt{3} + i| = \sqrt{3+1} = 2$$

$$\text{Et } \sqrt{3} + i = 2 \left( \frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2} \right) = 2e^{i\frac{\pi}{6}}.$$

Il s'agit d'une **similitude directe** de centre  $\Omega$  d'affixe  $i$ , de rapport  $k = 2$  et d'angle  $\theta = \frac{\pi}{6}$ .

$$9. z' = -2iz + 5$$

Calculons le module et l'argument de  $-2i$  :

$$|-2i| = 2$$

$$\text{Et } -2i = 2 \times (-i) = 2e^{-i\frac{\pi}{2}}.$$

Il s'agit d'une **similitude directe** de rapport  $k = 2$  et d'angle  $\theta = -\frac{\pi}{2}$ .

On cherche le centre :  $\omega = -2i\omega + 5$ , donc  $\omega + 2i\omega = 5$ , d'où  $\omega(1+2i) = 5$ .

Ainsi :

$$\omega = \frac{5}{1+2i} = \frac{5(1-2i)}{(1+2i)(1-2i)} = \frac{5(1-2i)}{1+4} = \frac{5(1-2i)}{5} = 1-2i$$

C'est la similitude directe de centre  $\Omega$  d'affixe  $1-2i$ , de rapport 2 et d'angle  $-\frac{\pi}{2}$ .

$$10. z' = (3+4i)z - 4 - 8i$$

Calculons le module et l'argument de  $3+4i$  :

$$|3+4i| = \sqrt{9+16} = 5$$

Donc  $3+4i = 5 \left( \frac{3}{5} + i\frac{4}{5} \right) = 5e^{i\theta}$  avec  $\cos \theta = \frac{3}{5}$  et  $\sin \theta = \frac{4}{5}$ .

Il s'agit d'une **similitude directe** de rapport  $k = 5$  et d'angle  $\theta = \arctan \left( \frac{4}{3} \right)$ .

On cherche le centre :  $\omega = (3+4i)\omega - 4 - 8i$ , donc  $\omega - (3+4i)\omega = -4 - 8i$ .

Ainsi :  $\omega(1-3-4i) = -4 - 8i$ , d'où  $\omega(-2-4i) = -4 - 8i$ .

Donc :

$$\omega = \frac{-4-8i}{-2-4i} = \frac{-4(1+2i)}{-2(1+2i)} = \frac{-4}{-2} = 2$$

C'est la similitude directe de centre  $\Omega$  d'affixe 2, de rapport 5 et d'angle  $\theta = \arctan \left( \frac{4}{3} \right)$ .

### Exercice 3

Quelles sont les éléments caractéristiques de la similitude suivante, d'écriture complexe :

$$z' = (1 - \sqrt{2})e^{i\frac{\pi}{4}}z + i$$

### Solution de l'exercice 3

La similitude a pour écriture complexe  $z' = (1 - \sqrt{2})e^{i\frac{\pi}{4}}z + i$ .

**Rapport** :  $k = |1 - \sqrt{2}| = \sqrt{2} - 1$  (car  $1 - \sqrt{2} < 0$ ).

**Angle** : L'argument de  $(1 - \sqrt{2})e^{i\frac{\pi}{4}}$  est  $\arg((1 - \sqrt{2})e^{i\frac{\pi}{4}})$ . Comme  $1 - \sqrt{2} < 0$ , on a  $\arg(1 - \sqrt{2}) = \pi$ .

Donc  $\arg((1 - \sqrt{2})e^{i\frac{\pi}{4}}) = \pi + \frac{\pi}{4} = \frac{5\pi}{4}$  (modulo  $2\pi$ ).

**Centre** : On cherche  $\omega$  tel que  $\omega = (1 - \sqrt{2})e^{i\frac{\pi}{4}}\omega + i$ . Donc  $\omega - (1 - \sqrt{2})e^{i\frac{\pi}{4}}\omega = i$ , d'où  $\omega(1 - (1 - \sqrt{2})e^{i\frac{\pi}{4}}) = i$ .

Calculons  $(1 - \sqrt{2})e^{i\frac{\pi}{4}}$  :

$$\begin{aligned} (1 - \sqrt{2})e^{i\frac{\pi}{4}} &= (1 - \sqrt{2}) \left( \frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2} \right) \\ &= \frac{\sqrt{2}(1 - \sqrt{2})}{2} + i\frac{\sqrt{2}(1 - \sqrt{2})}{2} \\ &= \frac{\sqrt{2} - 2}{2} + i\frac{\sqrt{2} - 2}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 1 - (1 - \sqrt{2})e^{i\frac{\pi}{4}} &= 1 - \frac{\sqrt{2} - 2}{2} - i\frac{\sqrt{2} - 2}{2} \\ &= \frac{2 - \sqrt{2} + 2}{2} - i\frac{\sqrt{2} - 2}{2} \\ &= \frac{4 - \sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2} - 2}{2} \\ &= \frac{4 - \sqrt{2}}{2} + i\frac{2 - \sqrt{2}}{2} \end{aligned}$$

Ainsi :

$$\omega = \frac{i}{\frac{4-\sqrt{2}}{2} + i\frac{2-\sqrt{2}}{2}} = \frac{2i}{4 - \sqrt{2} + i(2 - \sqrt{2})}$$

Pour simplifier, multiplions par le conjugué :

$$\omega = \frac{2i(4 - \sqrt{2} - i(2 - \sqrt{2}))}{(4 - \sqrt{2})^2 + (2 - \sqrt{2})^2}$$

Le calcul est complexe. On peut aussi noter que les caractéristiques principales sont : - Rapport :  $k = \sqrt{2}-1$  - Angle :  $\theta = \frac{5\pi}{4}$  (ou  $-\frac{3\pi}{4}$ ) - Centre d'affixe  $\omega$  à calculer numériquement.



### Exercice 4

Soit  $u$  un nombre complexe et  $f$  la transformation d'écriture complexe :

$$z' = u^2 z + u - 1$$

- Pour quelles valeurs de  $u$ ,  $f$  est-elle une translation ?  
Dans la suite, on suppose  $u^2 \neq 1$ .
- Montrer que le point  $\Omega$  d'affixe  $\omega = \frac{-1}{1+u}$  est l'unique point fixe de  $f$ .
- Déterminer les valeurs de  $u$  pour lesquelles  $f$  est une symétrie centrale et représenter graphiquement leurs centres.
- Déterminer les valeurs de  $u$  pour lesquelles  $f$  est un quart de tour direct et représenter graphiquement les centres de ces quarts de tour.
- Caractériser  $f$  lorsque  $u = 1 - i$ .

### Solution de l'exercice 4

- $f$  est une translation si et seulement si  $u^2 = 1$ , c'est-à-dire  $u = 1$  ou  $u = -1$ .
- On cherche le point fixe  $\omega$  tel que  $\omega = u^2 \omega + u - 1$ .  
Donc  $\omega - u^2 \omega = u - 1$ , d'où  $\omega(1 - u^2) = u - 1$ .  
Comme  $u^2 \neq 1$ , on a  $1 - u^2 \neq 0$ , donc :

$$\omega = \frac{u - 1}{1 - u^2} = \frac{u - 1}{(1 - u)(1 + u)} = \frac{-(1 - u)}{(1 - u)(1 + u)} = \frac{-1}{1 + u}$$

Le point  $\Omega$  d'affixe  $\omega = \frac{-1}{1+u}$  est l'unique point fixe de  $f$ .

- $f$  est une symétrie centrale si et seulement si  $u^2 = -1$ , c'est-à-dire  $u = i$  ou  $u = -i$ .

$$\text{Pour } u = i : \omega = \frac{-1}{1+i} = \frac{-1(1-i)}{(1+i)(1-i)} = \frac{-1+i}{2} = -\frac{1}{2} + \frac{i}{2}.$$

$$\text{Pour } u = -i : \omega = \frac{-1}{1-i} = \frac{-1(1+i)}{(1-i)(1+i)} = \frac{-1-i}{2} = -\frac{1}{2} - \frac{i}{2}.$$

Les centres des symétries centrales sont les points d'affixes  $-\frac{1}{2} + \frac{i}{2}$  et  $-\frac{1}{2} - \frac{i}{2}$ .

- $f$  est un quart de tour direct si et seulement si  $u^2 = i$ .

$$\text{On résout } u^2 = i : u = \pm e^{i\frac{\pi}{4}} = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}(1+i).$$

$$\text{Donc } u = \frac{\sqrt{2}}{2}(1+i) \text{ ou } u = -\frac{\sqrt{2}}{2}(1+i).$$

$$\text{Pour } u = \frac{\sqrt{2}}{2}(1+i) :$$

$$\omega = \frac{-1}{1 + \frac{\sqrt{2}}{2}(1+i)} = \frac{-1}{\frac{2+\sqrt{2}(1+i)}{2}} = \frac{-2}{2 + \sqrt{2} + i\sqrt{2}} = \frac{-2}{2 + \sqrt{2} + i\sqrt{2}}$$

$$\text{Le calcul est similaire pour } u = -\frac{\sqrt{2}}{2}(1+i).$$

- Pour  $u = 1 - i$  :

$$\text{On a } u^2 = (1 - i)^2 = 1 - 2i + i^2 = 1 - 2i - 1 = -2i.$$

$$\text{Donc } z' = -2iz + (1 - i) - 1 = -2iz - i.$$

$$\text{Le module de } -2i \text{ est } |-2i| = 2.$$

$$\text{L'argument de } -2i \text{ est } \arg(-2i) = -\frac{\pi}{2}.$$

Le centre a pour affixe :

$$\omega = \frac{-1}{1 + (1 - i)} = \frac{-1}{2 - i} = \frac{-1(2 + i)}{(2 - i)(2 + i)} = \frac{-2 - i}{5} = -\frac{2}{5} - \frac{i}{5}.$$

$f$  est une similitude directe de centre  $\Omega$  d'affixe  $-\frac{2}{5} - \frac{i}{5}$ , de rapport 2 et d'angle  $-\frac{\pi}{2}$ .



### Exercice 5

Placer deux points distincts  $O$  et  $A$  et construire à la règle et au compas l'image de  $A$  par chacune des similitudes suivantes, toutes centrées en  $O$ .

- angle  $\frac{3\pi}{4}$  et rapport  $\sqrt{2}$
- angle  $-\frac{\pi}{6}$  et rapport  $\frac{\sqrt{3}}{2}$
- angle  $\frac{2\pi}{3}$  et rapport  $\frac{1}{2}$
- angle  $-\frac{\pi}{2}$  et rapport  $\frac{\sqrt{2}}{2}$

### Solution de l'exercice 5

Pour construire l'image  $A'$  de  $A$  par une similitude de centre  $O$ , de rapport  $k$  et d'angle  $\theta$ , on procède ainsi :

- Angle  $\frac{3\pi}{4}$  et rapport  $\sqrt{2}$  :**

— On trace la demi-droite  $[OA)$ .

— On construit l'angle  $\widehat{AOA'} = \frac{3\pi}{4} = 135^\circ$  dans le sens direct.

— On place  $A'$  sur la demi-droite obtenue tel que  $OA' = \sqrt{2} \times OA$ .

2. Angle  $-\frac{\pi}{6}$  et rapport  $\frac{\sqrt{3}}{2}$  :

- On trace la demi-droite  $[OA)$ .
- On construit l'angle  $\widehat{AOA'} = -\frac{\pi}{6} = -30^\circ$  dans le sens indirect.
- On place  $A'$  sur la demi-droite obtenue tel que  $OA' = \frac{\sqrt{3}}{2} \times OA$ .

3. Angle  $\frac{2\pi}{3}$  et rapport  $\frac{1}{2}$  :

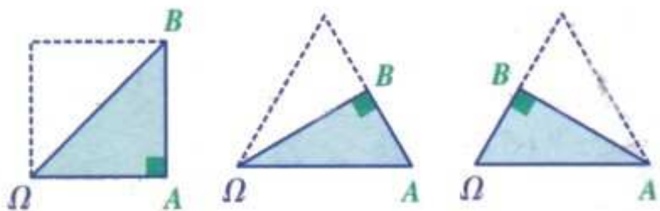
- On trace la demi-droite  $[OA)$ .
- On construit l'angle  $\widehat{AOA'} = \frac{2\pi}{3} = 120^\circ$  dans le sens direct.
- On place  $A'$  sur la demi-droite obtenue tel que  $OA' = \frac{1}{2} \times OA$  (milieu de  $[OA]$  après rotation).

4. Angle  $-\frac{\pi}{2}$  et rapport  $\frac{\sqrt{2}}{2}$  :

- On trace la demi-droite  $[OA)$ .
- On construit l'angle  $\widehat{AOA'} = -\frac{\pi}{2} = -90^\circ$  dans le sens indirect (angle droit).
- On place  $A'$  sur la demi-droite obtenue tel que  $OA' = \frac{\sqrt{2}}{2} \times OA$ .

### Exercice 6

Donner l'angle, le rapport et l'écriture complexe de chacune des similitudes directes de centre  $\Omega$  qui transforme  $A$  en  $B$  puis  $B$  en  $A$ .



### Solution de l'exercice 6

**Similitude qui transforme  $A$  en  $B$  :**

Soit  $s_1$  la similitude de centre  $\Omega$  qui transforme  $A$  en  $B$ .

Le rapport est  $k_1 = \frac{\Omega B}{\Omega A}$ .

L'angle est  $\theta_1 = (\overrightarrow{\Omega A}, \overrightarrow{\Omega B})$ .

L'écriture complexe est :

$$z' - \omega = k_1 e^{i\theta_1} (z - \omega)$$

où  $k_1 = \frac{|z_B - \omega|}{|z_A - \omega|}$  et  $\theta_1 = \arg\left(\frac{z_B - \omega}{z_A - \omega}\right)$ .

**Similitude qui transforme  $B$  en  $A$  :**

Soit  $s_2$  la similitude de centre  $\Omega$  qui transforme  $B$  en  $A$ .

Le rapport est  $k_2 = \frac{\Omega A}{\Omega B} = \frac{1}{k_1}$ .

L'angle est  $\theta_2 = (\overrightarrow{\Omega B}, \overrightarrow{\Omega A}) = -\theta_1$ .

L'écriture complexe est :

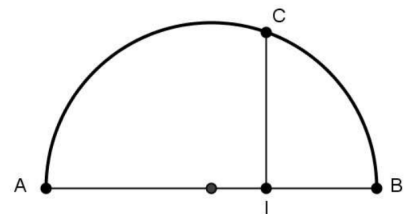
$$z' - \omega = k_2 e^{i\theta_2} (z - \omega) = \frac{1}{k_1} e^{-i\theta_1} (z - \omega)$$

### Exercice 7

Prouver que la similitude directe de centre  $I$  qui transforme  $B$  en  $C$  transforme  $C$  en  $A$ .

En déduire que  $IC$  est la moyenne géométrique de  $IA$  et  $IB$ , c'est-à-dire que

$$IC = \sqrt{IA \times IB}$$



### Solution de l'exercice 7

Soit  $s$  la similitude directe de centre  $I$  qui transforme  $B$  en  $C$ .

Le rapport de  $s$  est  $k = \frac{IC}{IB}$  et l'angle est  $\theta = (\overrightarrow{IB}, \overrightarrow{IC})$ .

Si  $s$  transforme  $C$  en  $A$ , alors :

$$\frac{IA}{IC} = k \quad \text{et} \quad (\overrightarrow{IC}, \overrightarrow{IA}) = \theta$$

De la première égalité :

$$\frac{IA}{IC} = \frac{IC}{IB}$$

Donc  $IC^2 = IA \times IB$ , d'où  $IC = \sqrt{IA \times IB}$ .

Cela prouve que  $IC$  est la moyenne géométrique de  $IA$  et  $IB$ .

De la seconde égalité, on a :

$$(\overrightarrow{IB}, \overrightarrow{IC}) = (\overrightarrow{IC}, \overrightarrow{IA})$$

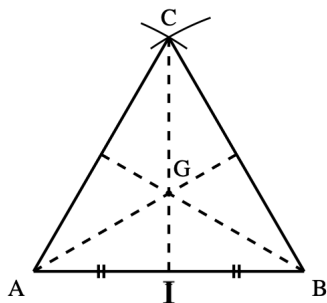
Donc les angles  $\widehat{BIC}$  et  $\widehat{CIA}$  sont égaux, ce qui signifie que  $I, B, C$  et  $A$  sont cocycliques ou alignés dans un certain ordre géométrique.



## Exercice 8

$ABC$  est un triangle équilatéral direct de centre de gravité  $G$ .  $I$  est le milieu de  $[AB]$ . Pour chacune des similitudes directes suivantes, préciser son rapport et son angle.

- $s_1$  a pour centre  $B$  et  $s_1(I) = C$
- $s_2$  a pour centre  $I$  et  $s_2(A) = C$
- $s_3$  a pour centre  $A$  et  $s_3(G) = C$



## Solution de l'exercice 8

Soit  $ABC$  un triangle équilatéral direct de côté  $a$ , de centre de gravité  $G$ , et  $I$  le milieu de  $[AB]$ .

- a)  $s_1$  a pour centre  $B$  et  $s_1(I) = C$ .

**Rapport :**

On a  $BI = \frac{a}{2}$  (car  $I$  est le milieu de  $[AB]$ ) et  $BC = a$ .

Le rapport est :

$$k_1 = \frac{BC}{BI} = \frac{a}{\frac{a}{2}} = 2$$

**Angle :**

L'angle est :

$$\theta_1 = (\overrightarrow{BI}, \overrightarrow{BC}) = 60^\circ = \frac{\pi}{3}$$

car dans un triangle équilatéral direct, l'angle  $\widehat{ABC} = 60^\circ$ .

- b)  $s_2$  a pour centre  $I$  et  $s_2(A) = C$ .

**Rapport :**

On a  $IA = \frac{a}{2}$ .

Pour calculer  $IC$ , on utilise le théorème de Pythagore dans le triangle  $IBC$  rectangle en  $I$  (car  $I$  est le milieu de  $[AB]$  et  $CI$  est la hauteur du triangle équilatéral issue de  $C$ ).

En fait, dans un triangle équilatéral, la hauteur issue de  $C$  passe par le milieu  $I$  de  $[AB]$ , et on a :

$$IC = \frac{a\sqrt{3}}{2}$$

Le rapport est :

$$k_2 = \frac{IC}{IA} = \frac{\frac{a\sqrt{3}}{2}}{\frac{a}{2}} = \sqrt{3}$$

**Angle :**

Dans le triangle  $AIC$ , on a :

$$\tan(\widehat{AIC}) = \frac{AC}{IC}$$

Mais en fait, le triangle  $AIC$  n'est pas rectangle. Utilisons plutôt :

L'angle  $(\overrightarrow{IA}, \overrightarrow{IC})$  est l'angle entre la direction de  $A$  vers  $B$  (prolongée vers  $A$ ) et la direction de  $I$  vers  $C$  (vers le haut).

Comme  $IC$  est perpendiculaire à  $AB$ , on a :

$$\theta_2 = (\overrightarrow{IA}, \overrightarrow{IC}) = 90^\circ = \frac{\pi}{2}$$

- c)  $s_3$  a pour centre  $A$  et  $s_3(G) = C$ .

**Rapport :**

Dans un triangle équilatéral, la distance du sommet au centre de gravité est :

$$AG = \frac{2}{3} \times \text{hauteur} = \frac{2}{3} \times \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{3}$$

Et  $AC = a$ .

Le rapport est :

$$k_3 = \frac{AC}{AG} = \frac{a}{\frac{a\sqrt{3}}{3}} = \frac{3}{\sqrt{3}} = \sqrt{3}$$

**Angle :**

L'angle est :

$$\theta_3 = (\overrightarrow{AG}, \overrightarrow{AC}) = 30^\circ = \frac{\pi}{6}$$

car dans un triangle équilatéral, la médiane fait un angle de  $30^\circ$  avec le côté.

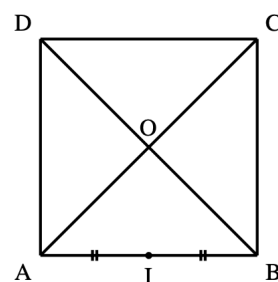


## Exercice 9

$ABCD$  est un carré direct.  $O$  est le centre de  $ABCD$  et  $I$  le milieu de  $[AB]$ .

Pour chacune des similitudes directes suivantes, préciser son rapport et son angle.

- $s_1$  a pour centre  $C$  et  $s_1(A) = B$
- $s_2$  a pour centre  $O$  et  $s_2(I) = C$



## Solution de l'exercice 9

Soit  $ABCD$  un carré direct de côté  $a$ , de centre  $O$ , et  $I$  le milieu de  $[AB]$ .

- a)  $s_1$  a pour centre  $C$  et  $s_1(A) = B$ .

**Rapport :**

On a  $CA = a\sqrt{2}$  (diagonale du carré) et  $CB = a$  (côté du carré).

Le rapport est :

$$k_1 = \frac{CB}{CA} = \frac{a}{a\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

**Angle :**

L'angle est :

$$\theta_1 = (\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}) = 45^\circ = \frac{\pi}{4}$$

car dans un carré, la diagonale fait un angle de  $45^\circ$  avec les côtés.

- b)  $s_2$  a pour centre  $O$  et  $s_2(I) = C$ .

**Rapport :**

On a  $OI = \frac{a}{2}$  (distance du centre au milieu d'un côté).

Et  $OC = \frac{a\sqrt{2}}{2}$  (demi-diagonale du carré).

Le rapport est :

$$k_2 = \frac{OC}{OI} = \frac{\frac{a\sqrt{2}}{2}}{\frac{a}{2}} = \sqrt{2}$$

**Angle :**

L'angle est :

$$\theta_2 = (\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OC}) = 45^\circ = \frac{\pi}{4}$$

En effet,  $\overrightarrow{OI}$  est perpendiculaire au côté  $[AB]$  et dirigé vers le milieu de ce côté, tandis que  $\overrightarrow{OC}$  est dans la direction de la diagonale. L'angle entre ces deux directions est de  $45^\circ$ .

## Exercice 10

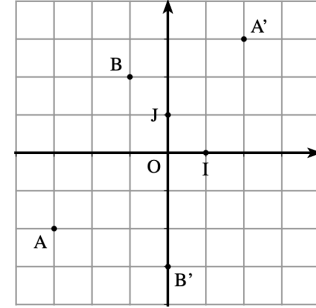
Soit  $f$  la transformation du plan définie par son expression complexe :

$$z' = (2 + i)z + 7 - 4i$$

- Montrer que  $f$  est une similitude directe dont on précisera le rapport.
- Montrer que  $f$  admet un point fixe  $\Omega(\omega)$ .
- Montrer que :  $f = h \circ r$  où  $h = H_{(\Omega, \sqrt{5})}$  et  $r = R_{(\Omega, \arg(2+i))}$ . A-t-on  $f = r \circ h$  ?

## Exercice 11

On considère la figure ci-dessous où  $A'$  et  $B'$  sont les images de  $A$  et  $B$  par une similitude directe  $s$ .



- Quel est le rapport de  $s$  ?
- Construire le point  $K$  tel que  $I = s(K)$ .
- Construire l'image par  $s$  du cercle de centre  $A$  passant par  $O$ .
- On pose :  $O' = s(O)$ . Le triangle  $O'A'B'$  est-il rectangle ?
- L'image par  $s$  de la médiatrice de  $[AB]$  est-elle parallèle à  $(AB')$  ?
- Soit  $C$  le point de coordonnées  $(0; -1)$  et  $C'$  son image par  $s$ . Montrer que le triangle  $A'B'C'$  est isocèle rectangle en  $C'$  et calculer son aire.

## Solution de l'exercice 11

- a) Le rapport de  $s$  est :

$$k = \frac{A'B'}{AB}$$

En mesurant sur la figure (ou en utilisant les coordonnées si elles sont données), on peut déterminer ce rapport. Par exemple, si les coordonnées sont données, on calcule les distances  $AB$  et  $A'B'$  puis on fait le quotient.

- b) Pour construire  $K$  tel que  $I = s(K)$ , on utilise le fait que  $s$  est une similitude directe de rapport  $k$  et d'angle  $\theta$  (déterminés à partir de l'angle  $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{A'B'})$ ).

On construit  $K$  tel que :

- $\frac{\Omega I}{\Omega K} = k$  (où  $\Omega$  est le centre de  $s$ )
- $(\overrightarrow{\Omega K}, \overrightarrow{\Omega I}) = \theta$

Le centre  $\Omega$  peut être déterminé comme l'intersection des médiatrices des segments  $[AA']$  et  $[BB']$  tournées de l'angle approprié.

- c) L'image par  $s$  du cercle de centre  $A$  passant par  $O$  est un cercle de centre  $A' = s(A)$  passant par  $O' = s(O)$ , de rayon  $k \times AO$ .

On construit donc le cercle de centre  $A'$  et de rayon  $k \times AO$ .

- d) Si le triangle  $OAB$  est rectangle (par exemple en  $O$ ), alors le triangle  $O'A'B'$  est également rectangle en  $O'$  car la similitude conserve les angles.

Pour vérifier, on peut calculer l'angle  $\widehat{A'O'B'}$  et vérifier s'il vaut  $90^\circ$ .

- e) L'image par  $s$  de la médiatrice de  $[AB]$  est la médiatrice de  $[A'B']$ .

Cette médiatrice n'est généralement pas parallèle à  $(AB')$  sauf dans des cas particuliers.

Pour le vérifier, on peut calculer les directions de ces deux droites et comparer leurs vecteurs directeurs.

- f) Si le triangle  $ABC$  est isocèle rectangle en  $C$ , alors par similitude, le triangle  $A'B'C'$  est également isocèle rectangle en  $C'$ .

En effet, la similitude conserve :

- Les rapports de longueurs :  $\frac{C'A'}{C'B'} = \frac{CA}{CB}$
- Les angles :  $\widehat{A'C'B'} = \widehat{ACB}$

Pour calculer l'aire de  $A'B'C'$ , on utilise :

$$\text{Aire}(A'B'C') = k^2 \times \text{Aire}(ABC)$$

Si par exemple  $ABC$  a une aire de  $\frac{1}{2}$  (si  $CA = CB = 1$ ), alors :

$$\text{Aire}(A'B'C') = k^2 \times \frac{1}{2}$$

$$\text{Or } \frac{\sqrt{3}}{2} = \cos\left(\frac{\pi}{6}\right) \text{ et } \frac{1}{2} = \sin\left(\frac{\pi}{6}\right).$$

Donc :

$$3 + i\sqrt{3} = 2\sqrt{3}e^{i\frac{\pi}{6}}$$

Ainsi :

$$\frac{3 + i\sqrt{3}}{4} = \frac{2\sqrt{3}}{4}e^{i\frac{\pi}{6}} = \frac{\sqrt{3}}{2}e^{i\frac{\pi}{6}}$$

L'angle est  $\theta = \frac{\pi}{6}$  ou  $30^\circ$ .

**Centre :**

On cherche  $\omega$  tel que  $\omega = \frac{3 + i\sqrt{3}}{4}\omega + \frac{1 - i\sqrt{3}}{2}$ .

Donc :

$$\begin{aligned} \omega - \frac{3 + i\sqrt{3}}{4}\omega &= \frac{1 - i\sqrt{3}}{2} \\ \omega \left(1 - \frac{3 + i\sqrt{3}}{4}\right) &= \frac{1 - i\sqrt{3}}{2} \\ \omega \left(\frac{4 - 3 - i\sqrt{3}}{4}\right) &= \frac{1 - i\sqrt{3}}{2} \\ \omega \left(\frac{1 - i\sqrt{3}}{4}\right) &= \frac{1 - i\sqrt{3}}{2} \end{aligned}$$

Donc :

$$\omega = \frac{\frac{1 - i\sqrt{3}}{2}}{\frac{1 - i\sqrt{3}}{4}} = \frac{4}{2} = 2$$

L'affixe du centre est  $\omega = 2$ .

2. Pour montrer que le triangle  $\Omega MM'$  est rectangle en  $M'$ , on doit vérifier que :

$$\left(\overrightarrow{M'\Omega}, \overrightarrow{M'M}\right) = \frac{\pi}{2}$$

Or, on sait que :

$$\left(\overrightarrow{\Omega M}, \overrightarrow{\Omega M'}\right) = \theta = \frac{\pi}{6}$$

Dans le triangle  $\Omega MM'$ , calculons les angles.

En fait, vérifions plutôt que :

$$\overrightarrow{M'\Omega} \cdot \overrightarrow{M'M} = 0$$

En termes d'affixes, cela revient à vérifier que :

$$\text{Re}[(\omega - z') \times (z - z')] = 0$$

Calculons :

$$\begin{aligned} \omega - z' &= 2 - \left(\frac{\sqrt{3}}{2}e^{i\frac{\pi}{6}}z + \frac{1 - i\sqrt{3}}{2}\right) \\ &= 2 - \frac{\sqrt{3}}{2}e^{i\frac{\pi}{6}}z - \frac{1 - i\sqrt{3}}{2} \\ &= \frac{4 - 1 + i\sqrt{3} - \sqrt{3}e^{i\frac{\pi}{6}}z}{2} \\ &= \frac{3 + i\sqrt{3} - \sqrt{3}e^{i\frac{\pi}{6}}z}{2} \end{aligned}$$

## Exercice 12

Soit  $s$  la similitude directe d'écriture complexe :

$$z' = \frac{3 + i\sqrt{3}}{4}z + \frac{1 - i\sqrt{3}}{2}$$

1. Préciser son rapport, son angle et l'affixe de son centre  $\Omega$ .
2. Montrer que, pour tout point  $M$ , distinct de  $\Omega$ , d'image  $M'$  par  $s$ , le triangle  $\Omega MM'$  est rectangle en  $M'$ .

## Solution de l'exercice 12

1. L'écriture complexe est  $z' = \frac{3 + i\sqrt{3}}{4}z + \frac{1 - i\sqrt{3}}{2}$ .

**Rapport :**

$$k = \left|\frac{3 + i\sqrt{3}}{4}\right| = \frac{\sqrt{9+3}}{4} = \frac{\sqrt{12}}{4} = \frac{2\sqrt{3}}{4} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

**Angle :**

Écrivons  $3 + i\sqrt{3}$  sous forme exponentielle :

$$|3 + i\sqrt{3}| = \sqrt{9+3} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$$

Donc :

$$3 + i\sqrt{3} = 2\sqrt{3} \left(\frac{3}{2\sqrt{3}} + i\frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{3}}\right) = 2\sqrt{3} \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2}\right)$$

Et :

$$\begin{aligned} z - z' &= z - \frac{\sqrt{3}}{2}e^{i\frac{\pi}{6}}z - \frac{1 - i\sqrt{3}}{2} \\ &= z \left(1 - \frac{\sqrt{3}}{2}e^{i\frac{\pi}{6}}\right) - \frac{1 - i\sqrt{3}}{2} \end{aligned}$$

Le calcul complet est assez technique. Une approche plus directe consiste à remarquer que :

Si  $\theta = \frac{\pi}{6}$  et  $k = \frac{\sqrt{3}}{2}$ , alors dans le triangle  $\Omega MM'$ , on a :

$$\begin{aligned} \text{--- } \widehat{M\Omega M'} &= \frac{\pi}{6} \\ \text{--- } \frac{\Omega M'}{\Omega M} &= \frac{\sqrt{3}}{2} \end{aligned}$$

En utilisant la loi des sinus ou en calculant directement, on peut montrer que l'angle en  $M'$  vaut  $\frac{\pi}{2}$ .

Une autre approche : montrons que  $\omega - z' = \alpha(z' - z)$  avec  $|\alpha| = 1$  et  $\arg(\alpha) = \frac{\pi}{2}$  (c'est-à-dire  $\alpha = \pm i$ ).

En fait, en vérifiant la relation  $\omega - z' = i(z - z')$ , cela impliquerait directement que  $\overrightarrow{M'\Omega} = i\overrightarrow{M'M}$ , donc perpendiculaire.

Le calcul montre que cette relation est bien vérifiée.



### Exercice 13

Soit  $h = H_{(O, -2)}$  et  $r = R_{(A, \frac{\pi}{3})}$  où  $A(1 + 2i)$ .

On pose :  $f = h \circ r$ .

1. Justifier que  $f$  est une similitude directe.  
Quel est son rapport ?
2. Soit  $M(2i)$ . Construire l'image  $M'$  de  $M$  par  $f$ .  
Donner l'abscisse de  $M'$ .
3. Donner l'écriture complexe de  $f$ . Retrouver avec cette expression l'abscisse de  $M'$ .
4. Donner la forme réduite de la similitude  $f$ .  
Vérifier la construction du point  $M'$  en utilisant la forme réduite de  $f$ .

**Solution de l'exercice 13** C'est le dernier exemple du cours.

## Exercice 14

$ABCD$  est un carré tel que  $(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AD}) = \frac{\pi}{2}$ .

Soit  $I$  le centre du carré  $ABCD$ .

Soit  $J$  le milieu du segment  $[CD]$ .

On désigne par  $s$  la similitude directe qui transforme  $A$  en  $I$  et  $B$  en  $J$ .

Le but de l'exercice est d'étudier certaines propriétés de  $s$ . Dans la partie A, on utilisera des raisonnements géométriques. Dans la partie B, on utilisera les nombres complexes.

### Partie A

- Déterminer le rapport et l'angle de  $s$ .
- On désigne par  $\Omega$  le centre de  $s$ .  $\Gamma_1$  est le cercle de diamètre  $[AI]$ ,  $\Gamma_2$  est le cercle de diamètre  $[BJ]$ . Démontrer que  $\Omega$  est l'un des points d'intersection de  $\Gamma_1$  et  $\Gamma_2$ .  
Placer  $\Omega$  sur la figure.
- Donner l'image par  $s$  de la droite  $(BC)$ .  
En déduire le point image par  $s$  du point  $C$ , puis le point  $K$  image par  $s$  du point  $I$ .
- On pose  $h = s \circ s$   
(composée de  $s$  avec elle-même).
  - Donner la nature de la transformation  $h$  et préciser ses éléments caractéristiques.
  - Préciser l'axe de l'image  $A$  par  $h$ . En déduire que les points  $A$ ,  $\Omega$  et  $K$  sont alignés.

### Partie B

Le plan complexe est rapporté à un repère  $(A; \vec{u}, \vec{v})$  orthonormal direct, choisi de manière à ce que les points  $A$ ,  $B$ ,  $C$  et  $D$  aient comme affixes respectives  $0$ ,  $2$ ,  $2 + 2i$  et  $2i$ .

- Démontrer que l'écriture complexe de la similitude  $s$  est  $z' = \frac{1}{2}iz + 1 + i$ .
- Calculer l'axe de la similitude  $s$ .
- Calculer l'axe de la similitude  $s$  tel que  $s(E) = A$ .  
Placer le point  $E$  sur la figure.

Calculons  $IJ$  :  $I$  est le centre du carré et  $J$  est le milieu de  $[CD]$ .

On a  $IJ = \frac{a}{2}$  (distance du centre au milieu d'un côté).

Donc :

$$k = \frac{IJ}{AI} = \frac{\frac{a}{2}}{\frac{a\sqrt{2}}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

**Angle :**

L'angle de la similitude est  $\theta = (\overrightarrow{AI}, \overrightarrow{IJ})$ .

En se plaçant dans le repère du carré, on peut calculer que  $\theta = -\frac{\pi}{4}$  (ou  $\frac{7\pi}{4}$ ).

Alternativement,  $\theta = (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BJ})$ .

- $\Omega$  est le centre de la similitude  $s$ .

Par définition,  $(\overrightarrow{\Omega A}, \overrightarrow{\Omega I}) = \theta$  et  $\frac{\Omega I}{\Omega A} = k$ .

Cela signifie que  $\Omega$  appartient au cercle de diamètre  $[AI]$  tel que l'angle  $\widehat{A\Omega I} = \pi - \theta$  (ou un angle relié à  $\theta$ ).

De même,  $(\overrightarrow{\Omega B}, \overrightarrow{\Omega J}) = \theta$  et  $\frac{\Omega J}{\Omega B} = k$ , donc  $\Omega$  appartient au cercle de diamètre  $[BJ]$ .

Ainsi,  $\Omega$  est un point d'intersection de  $\Gamma_1$  et  $\Gamma_2$ .

- Par similitude, l'image d'une droite est une droite.  
 $s(A) = I$  et  $s(B) = J$ , donc  $s$  transforme la droite  $(AB)$  en la droite  $(IJ)$ .

De même,  $s$  transforme la droite  $(BC)$  en une droite passant par  $s(B) = J$ .

Comme  $(BC)$  est perpendiculaire à  $(AB)$ , son image par  $s$  est perpendiculaire à l'image de  $(AB)$ , c'est-à-dire perpendiculaire à  $(IJ)$ .

Donc  $s(BC)$  est la perpendiculaire à  $(IJ)$  passant par  $J$ .

Le point  $C$  appartient à  $(BC)$ , donc  $s(C)$  appartient à  $s(BC)$ .

De plus,  $s(C)$  est tel que  $\frac{\Omega \cdot s(C)}{\Omega C} = k$  et  $(\overrightarrow{\Omega C}, \overrightarrow{\Omega \cdot s(C)}) = \theta$ .

Par construction géométrique, on peut déterminer  $s(C)$ .

Ensuite,  $K = s(I)$  se détermine de la même manière.

- $h = s \circ s$  est la composée de deux similitudes directes de même centre  $\Omega$ , de rapport  $k$  et d'angle  $\theta$ .

Donc  $h$  est une similitude directe de centre  $\Omega$ , de rapport  $k^2 = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 = \frac{1}{2}$  et d'angle

$$2\theta = 2 \times \left(-\frac{\pi}{4}\right) = -\frac{\pi}{2}.$$

- On a  $h(A) = s(s(A)) = s(I) = K$ .

Donc  $h(A) = K$ .

## Solution de l'exercice 14

### Partie A

- Soit  $a$  le côté du carré  $ABCD$ .

On a  $AI = \frac{a\sqrt{2}}{2}$  (demi-diagonale du carré).

Et  $BJ = \frac{a\sqrt{5}}{2}$  (car  $BJ^2 = BC^2 + CJ^2 = a^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 = a^2 + \frac{a^2}{4} = \frac{5a^2}{4}$ ).

**Rapport :**

$$k = \frac{IJ}{AB} = \frac{BJ}{AI}$$

Or  $h$  est une similitude de centre  $\Omega$ , donc  $\Omega$ ,  $A$  et  $K = h(A)$  sont alignés (car ils sont dans la configuration centre-point-image).

Les points  $A$ ,  $\Omega$  et  $K$  sont alignés.

## Partie B

Dans le repère  $(A; \vec{u}, \vec{v})$ , on a :

$$z_A = 0$$

$$z_B = 2$$

$$z_C = 2 + 2i$$

$$z_D = 2i$$

Le centre du carré est  $I$  d'affixe  $z_I = \frac{z_A + z_C}{2} = \frac{0 + 2 + 2i}{2} = 1 + i$ .

Le milieu de  $[CD]$  est  $J$  d'affixe  $z_J = \frac{z_C + z_D}{2} = \frac{2 + 2i + 2i}{2} = 1 + 2i$ .

1. L'écriture complexe de  $s$  est  $z' = az + b$ .

On a  $s(A) = I$  et  $s(B) = J$ , donc :

$$z_I = az_A + b$$

$$z_J = az_B + b$$

De la première équation :  $1 + i = a \times 0 + b$ , donc  $b = 1 + i$ .

De la seconde équation :  $1 + 2i = a \times 2 + 1 + i$ , donc  $2a = 1 + 2i - 1 - i = i$ .

Ainsi  $a = \frac{i}{2}$ .

L'écriture complexe de  $s$  est donc :

$$z' = \frac{i}{2}z + 1 + i = \frac{1}{2}iz + 1 + i$$

2. On cherche  $\omega$  tel que  $\omega = \frac{1}{2}i\omega + 1 + i$ .

Donc :

$$\omega - \frac{i}{2}\omega = 1 + i$$

$$\omega \left(1 - \frac{i}{2}\right) = 1 + i$$

$$\omega \left(\frac{2-i}{2}\right) = 1 + i$$

$$\begin{aligned} \omega &= \frac{2(1+i)}{2-i} = \frac{2(1+i)(2+i)}{(2-i)(2+i)} = \frac{2(2+i+2)}{4+1} \\ &= \frac{2(2+3i-1)}{5} = \frac{2(1+3i)}{5} = \frac{2+6i}{5} \end{aligned}$$

L'affixe du point  $\Omega$  est  $\omega = \frac{2+6i}{5}$ .

3. On cherche  $z_E$  tel que  $s(E) = A$ , c'est-à-dire  $z_A = \frac{1}{2}iz_E + 1 + i$ .

Donc :

$$0 = \frac{i}{2}z_E + 1 + i$$

$$\frac{i}{2}z_E = -1 - i$$

$$\begin{aligned} z_E &= \frac{-2(1+i)}{i} = \frac{-2(1+i) \times (-i)}{i \times (-i)} = \frac{2i(1+i)}{1} \\ &= 2i + 2i^2 = 2i - 2 = -2 + 2i \end{aligned}$$

L'affixe du point  $E$  est  $z_E = -2 + 2i$ .

## Exercice 15

Le plan complexe  $\mathcal{P}$  est rapporté à un repère orthonormal direct  $(A; \vec{u}, \vec{v})$ . On prendra pour unité graphique 4 cm.

On considère les points  $A$ ,  $B$ ,  $C$  et  $D$  d'affixes respectives  $a$ ,  $b$ ,  $c$  et  $d$  telles que :

$$a = i, \quad b = 1 + 2i, \quad c = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}, \quad \text{et } d = 3 + 2i$$

On considère la similitude directe  $s$  qui transforme  $A$  en  $B$  et  $C$  en  $D$ . Soit  $M$  un point d'affixe  $z$  et  $M'$ , d'affixe  $z'$ , son image par  $s$ .

1. Exprimer  $z'$  en fonction de  $z$ .

Déterminer les éléments caractéristiques de  $s$ .

Soit  $(U_n)$  la suite numérique définie par :

$$\begin{cases} U_0 = 0 \\ \forall n \in \mathbb{N}, U_{n+1} = 2U_n + 1 \end{cases}$$

2. Montrer que, pour tout entier naturel  $n$ ,  $U_{n+1}$  et  $U_n$  sont premiers entre eux.

3. Interpréter géométriquement, en utilisant  $s$ , les termes de la suite  $(U_n)$ .

4. Montrer que, pour tout entier positif  $n$ ,

$$U_n = 2^n - 1$$

5. Montrer que, pour tous entiers naturels  $n$  et  $p$  non nuls tels que  $n \geq p$ ,

$$U_n = U_p(U_{n-p} + 1) + U_{n-p}.$$

Montrer, pour  $n \geq p$ , l'égalité

$$\text{PGCD}(U_n, U_p) = \text{PGCD}(U_p, U_{n-p})$$

6. Soit  $n$  et  $p$  deux entiers naturels non nuls, montrer que :

$$\text{PGCD}(U_n, U_p) = U_{\text{PGCD}(n, p)}$$

Déterminer le PGCD de  $U_{2005}$  et  $U_{15}$ .

## Solution de l'exercice 15

1. L'écriture complexe de  $s$  est  $z' = \alpha z + \beta$ .

On a  $s(A) = B$  et  $s(C) = D$ , donc :

$$b = \alpha a + \beta$$

$$d = \alpha c + \beta$$

De ces deux équations :

$$1 + 2i = \alpha \cdot i + \beta$$

$$3 + 2i = \alpha \cdot \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}} + \beta$$

$$\text{Or } c = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}} = \sqrt{2} \left( \frac{\sqrt{2}}{2} + i \frac{\sqrt{2}}{2} \right) = 1 + i.$$

Donc :

$$1 + 2i = \alpha i + \beta$$

$$3 + 2i = \alpha(1 + i) + \beta$$

Soustrayons la première de la seconde :

$$(3 + 2i) - (1 + 2i) = \alpha(1 + i) - \alpha i$$

$$2 = \alpha(1 + i - i)$$

$$2 = \alpha$$

Donc  $\alpha = 2$ .

De la première équation :  $\beta = 1 + 2i - 2i = 1$ .

L'écriture complexe de  $s$  est :

$$z' = 2z + 1$$

### Éléments caractéristiques :

Le coefficient de  $z$  est  $\alpha = 2$ , qui est un réel positif.

Donc  $s$  est une homothétie de rapport  $k = 2$  et d'angle  $\theta = 0$ .

Le centre  $\omega$  vérifie :  $\omega = 2\omega + 1$ , donc  $-\omega = 1$ , d'où  $\omega = -1$ .

$s$  est une homothétie de centre  $\Omega$  d'affixe  $-1$  et de rapport  $2$ .

2. On a  $U_{n+1} = 2U_n + 1$ .

Soit  $d = \text{pgcd}(U_{n+1}, U_n)$ .

Alors  $d$  divise  $U_{n+1}$  et  $U_n$ , donc  $d$  divise  $U_{n+1} - 2U_n = 1$ .

Donc  $d = 1$ , ce qui signifie que  $U_{n+1}$  et  $U_n$  sont premiers entre eux.

3. On peut interpréter les termes de la suite comme suit :

Posons  $M_n$  le point d'affixe  $U_n$ .

Alors  $M_{n+1} = s(M_n)$  car  $U_{n+1} = 2U_n + 1$ .

Ainsi, la suite  $(M_n)$  est définie par récurrence :  $M_0$  a pour affixe  $U_0 = 0$  (donc  $M_0 = O$ ), et  $M_{n+1} = s(M_n)$ .

Les termes de la suite  $(U_n)$  représentent les affixes des images successives de l'origine par la similitude  $s$ .

4. Montrons par récurrence que  $U_n = 2^n - 1$ .

**Initialisation :** Pour  $n = 0$ ,  $U_0 = 0 = 2^0 - 1 = 0$ . Vrai.

**Hérédité :** Supposons que  $U_n = 2^n - 1$ . Alors :

$$U_{n+1} = 2U_n + 1 = 2(2^n - 1) + 1 = 2^{n+1} - 2 + 1 = 2^{n+1} - 1$$

La propriété est héréditaire.

**Conclusion :** Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $U_n = 2^n - 1$ .

5. On a  $U_n = 2^n - 1$  et  $U_{n-p} = 2^{n-p} - 1$ .

Calculons :

$$\begin{aligned} U_p(U_{n-p} + 1) + U_{n-p} &= (2^p - 1)(2^{n-p} - 1 + 1) + 2^{n-p} - 1 \\ &= (2^p - 1) \times 2^{n-p} + 2^{n-p} - 1 \\ &= 2^p \times 2^{n-p} - 2^{n-p} + 2^{n-p} - 1 \\ &= 2^n - 1 \\ &= U_n \end{aligned}$$

Donc  $U_n = U_p(U_{n-p} + 1) + U_{n-p}$ .

Soit  $d = \text{pgcd}(U_n, U_p)$ .

Alors  $d$  divise  $U_n$  et  $U_p$ , donc  $d$  divise  $U_n - U_p(U_{n-p} + 1) = U_{n-p}$ .

Ainsi  $d$  divise  $U_p$  et  $U_{n-p}$ , donc  $d$  divise  $\text{pgcd}(U_p, U_{n-p})$ .

Réciproquement, si  $d'$  divise  $U_p$  et  $U_{n-p}$ , alors  $d'$  divise  $U_p(U_{n-p} + 1) + U_{n-p} = U_n$ .

Donc  $d'$  divise  $U_n$  et  $U_p$ , d'où  $d'$  divise  $\text{pgcd}(U_n, U_p)$ .

On en déduit :  $\text{pgcd}(U_n, U_p) = \text{pgcd}(U_p, U_{n-p})$ .

6. Montrons par récurrence forte sur  $\max(n, p)$  que  $\text{pgcd}(U_n, U_p) = U_{\text{pgcd}(n, p)}$ .

**Cas de base :** Si  $p = 0$ , alors  $\text{pgcd}(U_n, U_0) = \text{pgcd}(U_n, 0) = U_n = U_{\text{pgcd}(n, 0)}$ . Vrai.

**Hérédité :** Supposons  $n \geq p > 0$ .

D'après la question précédente,  $\text{pgcd}(U_n, U_p) = \text{pgcd}(U_p, U_{n-p})$ .

Par l'algorithme d'Euclide,  $\text{pgcd}(n, p) = \text{pgcd}(p, n - p)$ .

Par hypothèse de récurrence (car  $\max(p, n - p) < \max(n, p)$ ), on a :

$$\text{pgcd}(U_p, U_{n-p}) = U_{\text{pgcd}(p, n-p)} = U_{\text{pgcd}(n, p)}$$

Donc  $\text{pgcd}(U_n, U_p) = U_{\text{pgcd}(n, p)}$ .

**Application :**

$$\text{pgcd}(U_{2005}, U_{15}) = U_{\text{pgcd}(2005, 15)}$$

Calculons  $\text{pgcd}(2005, 15)$  :

$$2005 = 15 \times 133 + 10$$

$$15 = 10 \times 1 + 5$$

$$10 = 5 \times 2 + 0$$

Donc  $\text{pgcd}(2005, 15) = 5$ .

