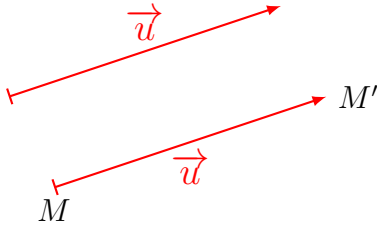


Similitudes

1. Expression complexe de quelques transformations du plan

Dans toute la suite, le plan est muni d'un repère orthonormé.

A. Cas des translations



Exemple :

On considère la translation $t_{\vec{u}}$ de vecteur $\vec{u}(-1 + 2i)$. Pour tout point $M(z)$, on note $M'(z')$ son image par la translation $t_{\vec{u}}$.

- Montrer que : $z' = z - 1 + 2i$.

Par définition de la translation, on a $\overrightarrow{MM'} = \vec{u}$.

Or $\overrightarrow{MM'} = z' - z$ et $\vec{u}$ a pour affixe $-1 + 2i$.

Donc $z' - z = -1 + 2i$, soit $z' = z - 1 + 2i$.

- Quel est l'antécédent du point $A(3 + 4i)$?

On cherche z tel que $z' = 3 + 4i$.

D'après la formule précédente : $3 + 4i = z - 1 + 2i$

Donc $z = 3 + 4i + 1 - 2i = 4 + 2i$.

L'antécédent est le point d'affixe $4 + 2i$.

■ PROPRIÉTÉ :

Soit $t_{\vec{u}}$ la translation de vecteur $\vec{u}$ d'affixe $b \in \mathbb{C}$. L'expression complexe de la translation $t_{\vec{u}}$ où $\vec{u}$ a pour affixe b est :

$$z' = z + b$$

Démonstration. Si $\vec{u}$ est le vecteur d'affixe b , l'image $M'(z')$ du point $M(z)$ par la translation $t_{\vec{u}}$ est définie par : $\overrightarrow{MM'} = \vec{u}$.

Or

$$\begin{aligned} \overrightarrow{MM'} = \vec{u} &\Leftrightarrow z' - z = b \\ &\Leftrightarrow z' = z + b \end{aligned}$$

c'est l'expression complexe de la translation $t_{\vec{u}}$. $\square$

Exemple :

Soient $A(-1 + 2i)$ et $B(3 + i)$.

Donner l'expression complexe de la translation $t_{\overrightarrow{AB}}$.

$$\begin{aligned} z_{\overrightarrow{AB}} &= z_B - z_A \\ &= (3 + i) - (-1 + 2i) \\ &= 4 - i \end{aligned}$$

L'expression complexe de $t_{\overrightarrow{AB}}$ est

$$z' = z + 4 - i$$

Soit $C(1 - 3i)$. Donner l'expression complexe de $t_{\overrightarrow{AB}} \circ t_{\overrightarrow{BC}}$ et identifier cette transformation.

$$\begin{aligned} z_{\overrightarrow{BC}} &= z_C - z_B = (1 - 3i) - (3 + i) \\ &= -2 - 4i \end{aligned}$$

$t_{\overrightarrow{BC}}$ a pour expression : $z' = z - 2 - 4i$.

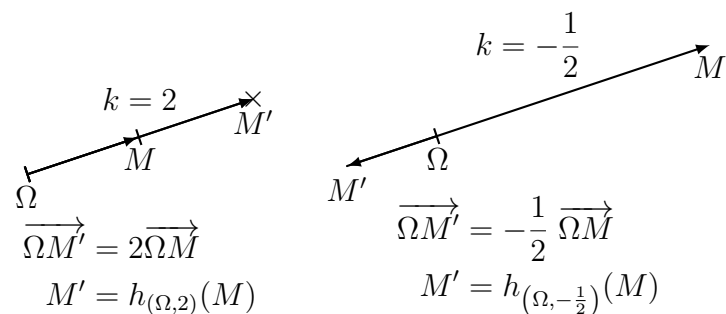
$$\begin{aligned} (t_{\overrightarrow{AB}} \circ t_{\overrightarrow{BC}})(z) &= t_{\overrightarrow{AB}}(z - 2 - 4i) \\ &= (z - 2 - 4i) + 4 - i \\ &= z + 2 - 5i \end{aligned}$$

C'est la translation de vecteur $\overrightarrow{AC}$ d'affixe $2 - 5i$.

B. Cas des homothéties

■ DÉFINITION : (Rappel)

Soit Ω un point du plan et k un réel **non nul**. L'**homothétie de centre Ω et de rapport k** , notée $h_{(\Omega; k)}$ est la transformation qui, à tout point M du plan associe le point M' tel que $\overrightarrow{\Omega M'} = k \overrightarrow{\Omega M}$



Exemple :

On considère l'homothétie $h_{(\Omega, -2)}$ où $\Omega(-2 + 5i)$.
 Pour tout point $M(z)$, on note $M'(z')$ son image par l'homothétie $h_{(\Omega, -2)}$.

- Montrer que : $z' = -2z - 6 + 15i$.

Par définition de l'homothétie, $\overrightarrow{\Omega M'} = -2\overrightarrow{\Omega M}$.

Donc

$$\begin{aligned} z' - z_\Omega &= -2(z - z_\Omega) \\ \text{i.e. } z' - (-2 + 5i) &= -2(z - (-2 + 5i)) \\ \text{i.e. } z' &= -2 + 5i - 2z + 2(-2 + 5i) \\ \text{i.e. } z' &= -2 + 5i - 2z - 4 + 10i \\ \text{i.e. } z' &= -2z - 6 + 15i \end{aligned}$$

- Quel est l'antécédent du point $B(-8 + 13i)$?

On cherche z tel que $-2z + 6 + 15i = -8 + 13i$.

$$\text{i.e. } -2z = -8 + 13i - 6 - 15i$$

$$\text{c'est-à-dire } -2z = -14 - 2i,$$

$$\text{ou encore } z = 7 + i.$$

■ DÉFINITION :

Soit $H_{(\Omega, k)}$ l'homothétie de rapport $k \in \mathbb{R}^*$ et de centre Ω d'affixe $\omega \in \mathbb{C}$.

L'expression complexe de l'homothétie $h_{(\Omega, k)}$ est :

$$z' - \omega = k(z - \omega)$$

Démonstration. Plus généralement : si $k \in \mathbb{R}^*$ et Ω est le point du plan d'affixe ω alors l'image du point $M'(z')$ du point $M(z)$ par l'homothétie $H_{(\Omega, k)}$ est définie par : $\overrightarrow{\Omega M'} = k\overrightarrow{\Omega M}$.

Or

$$\begin{aligned} \overrightarrow{\Omega M'} = k\overrightarrow{\Omega M} &\Leftrightarrow z' - \omega = k(z - \omega) \\ &\Leftrightarrow z' = kz + \omega(1 - k) \end{aligned}$$

□

Exemples :

- Déterminer l'expression complexe de l'homothétie $h_{(\Omega, -3)}$ où $\Omega(1 - i)$.

$$\begin{aligned} z' - (1 - i) &= -3(z - (1 - i)) \\ &= 1 - i - 3z + 3(1 - i) \\ &= 1 - i - 3z + 3 - 3i \\ &= -3z + 4 - 4i \end{aligned}$$

- Soit h' la transformation définie par l'expression complexe : $z' = -\frac{1}{2}z + 3 - \frac{3}{2}i$.

- * Montrer que h' admet un point fixe Φ d'affixe ϕ c'est-à-dire que $h'(\phi) = \phi$.

Un point fixe vérifie $z' = z$, donc

$$\begin{aligned} z = -\frac{1}{2}z + 3 - \frac{3}{2}i &\Leftrightarrow z + \frac{1}{2}z = 3 - \frac{3}{2}i \\ &\Leftrightarrow \frac{3}{2}z = 3 - \frac{3}{2}i \\ &\Leftrightarrow z = 2 - i \end{aligned}$$

Donc $\phi = 2 - i$.

- * Vérifier que cette expression complexe peut s'écrire sous la forme : $z' - \phi = -\frac{1}{2}(z - \phi)$.

$$\begin{aligned} z' - (2 - i) &= -\frac{1}{2}z + 3 - \frac{3}{2}i - 2 + i \\ &= -\frac{1}{2}z + 1 - \frac{1}{2}i \\ &= -\frac{1}{2}(z - (2 - i)) \end{aligned}$$

Quelle est la nature de la transformation h' ?

C'est l'homothétie de centre $\phi(2 - i)$ et de rapport $-\frac{1}{2}$.

Remarque : On pourra remarquer, pour mes calculs menés ici et dans la suite, la valeur de ϕ n'a aucune importance pour montrer cette inégalité : seule sa définition compte, à savoir que

$$\phi = -\frac{1}{2}\phi + 3 - \frac{3}{2}i$$

- On définit la transformation f qui au point $M(z)$ associe le point $M'(z')$ de la façon suivante : $M(z) \xrightarrow{h} M_1(z_1) \xrightarrow{h'} M'(z')$ où $M_1 = h(M)$ (h a été définie dans l'exemple précédent : $h = H_{(\Omega, -2)}$ où $\Omega(-2 + 5i)$ et son expression complexe est $z' = -2z - 6 + 15i$) et $M' = h'(M_1)$.

Autrement dit : $f = h' \circ h$.

Exprimer z_1 en fonction de z , puis z' en fonction de z_1 et enfin en déduire que l'expression complexe de la transformation f est :

$$z' = -2z - 6 + 15i$$

On a $z_1 = -2z - 6 + 15i$

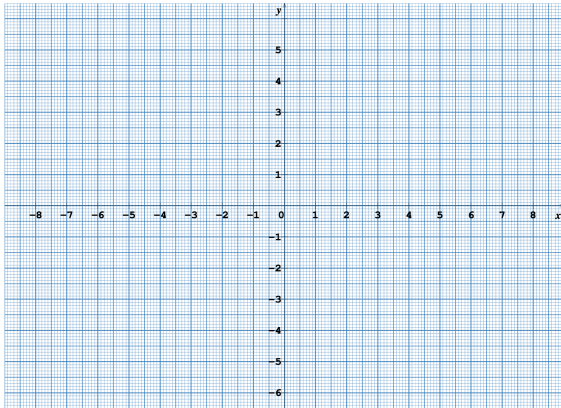
$$\begin{aligned} z' &= -\frac{1}{2}z_1 + 3 - \frac{3}{2}i \\ &= -\frac{1}{2}(-2z - 6 + 15i) + 3 - \frac{3}{2}i \\ &= z + 3 - \frac{15}{2}i + 3 - \frac{3}{2}i \\ &= z + 6 - \frac{18}{2}i \\ &= z + 6 - 9i \end{aligned}$$

On obtient donc : $z' = z + 6 - 9i$.

Quelle est la nature de la transformation f ?

C'est la translation de vecteur d'affixe $-9i$.

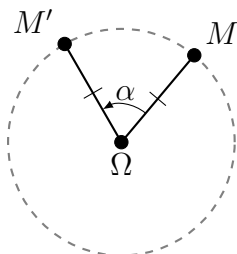
- Placer ci-dessous ϕ , $\Omega(-2 + 5i)$, $M(5i)$ et sans calcul, son image M_1 par h , ainsi que l'image M' de M_1 par h' . Confirmer par le dessin la nature de f .



C. Cas des rotations

Exemple :

On considère la rotation $R_{(\Omega, \frac{\pi}{2})}$ où $\text{Aff}(\Omega) = 1 + i$. Pour tout point $M(z)$, on note $M'(z')$ son image par la rotation $R_{(\Omega, \frac{\pi}{2})}$.



On rappelle que M' est le point défini par :

$$\begin{cases} \Omega M' = \Omega M \\ (\overrightarrow{\Omega M}; \overrightarrow{\Omega M'}) = \frac{\pi}{2}[2\pi] \end{cases} \text{ si } M \neq \Omega$$

et par $M' = \Omega$ si $M = \Omega$.

Pour tout $z \neq 1 + i$, interpréter géométriquement $\left| \frac{z' - (1 + i)}{z - (1 + i)} \right|$ puis $\arg \left(\frac{z' - (1 + i)}{z - (1 + i)} \right)$.

$$\left| \frac{z' - (1 + i)}{z - (1 + i)} \right| = \frac{|\Omega M'|}{|\Omega M|} = 1$$

car la rotation conserve les distances.

$\arg \left(\frac{z' - (1 + i)}{z - (1 + i)} \right) = (\overrightarrow{\Omega M}; \overrightarrow{\Omega M'}) \equiv \frac{\pi}{2} [2\pi]$
par définition de la rotation.

En déduire que $\frac{z' - (1 + i)}{z - (1 + i)} = e^{i\frac{\pi}{2}}$ et que pour tout $z \neq 1 + i$, $z' = iz + 2$.

Le nombre complexe de module 1 et d'argument $\frac{\pi}{2}$ est $e^{i\frac{\pi}{2}} = i$. Donc :

$$\begin{aligned} \frac{z' - (1 + i)}{z - (1 + i)} = i &\iff z' - (1 + i) = i(z - (1 + i)) \\ &\iff z' - (1 + i) = iz - i(1 + i) \\ &\iff z' - (1 + i) = iz - i + 1 \\ &\iff z' = iz - i + 1 + 1 + i = iz + 2 \end{aligned}$$

Constater enfin que cette égalité est encore vraie pour $z' = z = 1 + i$.

Pour $z = 1 + i$:

$$z' = i(1 + i) + 2 = i - 1 + 2 = 1 + i = z$$

■ DÉFINITION :

Plus généralement : si Ω est le point du plan d'affixe ω et si $\alpha \in \mathbb{R}$, alors l'image $M'(z')$ du point $M(z)$ par la rotation $R_{(\Omega, \alpha)}$ vérifie pour $M \neq \Omega$:

$$\left| \frac{z' - \omega}{z - \omega} \right| = \frac{|\Omega M'|}{|\Omega M|} = 1$$

et

$$\arg \left(\frac{z' - \omega}{z - \omega} \right) = (\overrightarrow{\Omega M}; \overrightarrow{\Omega M'})[2\pi]$$

et puisqu'un nombre complexe non nul est entièrement défini par son module et un de ses arguments, on en déduit que : $\frac{z' - \omega}{z - \omega} = e^{i\alpha}$ puisque $e^{i\alpha}$ est le nombre complexe de module 1 et d'argument α .

Ainsi, pour tout $z \neq \omega$: $z' - \omega = e^{i\alpha}(z - \omega)$ et cette égalité est encore vraie pour $z' = z = \omega$. D'où : l'expression complexe de la rotation $R_{(\Omega, \alpha)}$ où $\alpha \in \mathbb{R}$ et $\text{Aff}(\Omega) = \omega$ est :

$$z' - \omega = e^{i\alpha}(z - \omega)$$

Exemples :

- Déterminer l'écriture complexe de la rotation $R_{(O, \frac{\pi}{4})}$.

$$\Omega = O \text{ donc } \omega = 0 \text{ et } \alpha = \frac{\pi}{4}.$$

$$\begin{aligned} z' - 0 &= e^{i\frac{\pi}{4}}(z - 0) \\ z' &= e^{i\frac{\pi}{4}}z \\ &= \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right) z \\ &= \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i \frac{\sqrt{2}}{2} \right) z \end{aligned}$$

- On considère la transformation s d'écriture complexe : $z' = \frac{1-3i}{2}z + \frac{\sqrt{2}}{2}(i-1)$.

* Montrer que la transformation s admet un unique point fixe $\Omega(\omega)$.

$$\text{Un point fixe vérifie } z = \frac{1-3i}{2}z + \frac{\sqrt{2}}{2}(i-1)$$

$$\begin{aligned} z - \frac{1-3i}{2}z &= \frac{\sqrt{2}}{2}(i-1) \\ \iff z \left(1 - \frac{1-3i}{2} \right) &= \frac{\sqrt{2}}{2}(i-1) \\ \iff z \left(\frac{2 - (1-3i)}{2} \right) &= \frac{\sqrt{2}}{2}(i-1) \\ \iff z \left(\frac{1+3i}{2} \right) &= \frac{\sqrt{2}}{2}(i-1) \\ \iff z &= \frac{\sqrt{2}(i-1)}{1+3i} = \frac{\sqrt{2}(i-1)(1-3i)}{(1+3i)(1-3i)} \\ \iff z &= \frac{\sqrt{2}(i-1-3i^2+3i)}{1+9} \\ \iff z &= \frac{\sqrt{2}(4i-1+3)}{10} \\ \iff z &= \frac{\sqrt{2}(2+4i)}{10} \\ \iff z &= \frac{\sqrt{2}(1+2i)}{5} \end{aligned}$$

* s est-elle une rotation ?

$$\text{Calculons } \left| \frac{1-3i}{2} \right|$$

$$\left| \frac{1-3i}{2} \right| = \frac{|1-3i|}{2} = \frac{\sqrt{1+9}}{2} = \frac{\sqrt{10}}{2} \neq 1$$

Donc s n'est pas une rotation.

- On considère une autre transformation

$$g = R_{(O, -\frac{\pi}{4})} \circ R_{(\Omega, \frac{\pi}{2})}$$

où $\Omega(1+i)$.

- * Déterminer l'expression complexe de g .
Quelle est la nature de g ?

L'expression de $R_{(\Omega, \frac{\pi}{2})}$ est $z_1 = iz + 2$ (d'après l'exemple précédent)

Pour $R_{(O, -\frac{\pi}{4})}$

$$\begin{aligned} z' &= e^{-i\frac{\pi}{4}}z_1 \\ &= \left(\cos \left(-\frac{\pi}{4} \right) + i \sin \left(-\frac{\pi}{4} \right) \right) z_1 \\ &= \left(\frac{\sqrt{2}}{2} - i \frac{\sqrt{2}}{2} \right) z_1 \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2}(1-i)z_1 \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2}(1-i)(iz+2) \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2}(1-i)(iz+2) \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2}((1-i)iz+2(1-i)) \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2}(i(1-i)z+2(1-i)) \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2}((i+1)z+2(1-i)) \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2}(1+i)z + \sqrt{2}(1-i) \end{aligned}$$

- * A-t-on $g = R_{(\Omega, \frac{\pi}{2})} \circ R_{(O, -\frac{\pi}{4})}$?

Non, la composition de transformations n'est pas commutative en général. L'ordre des compositions change le résultat.

- On considère la transformation $g' = h' \circ R_{(\Omega, \frac{\pi}{2})}$ où h' l'homothétie a été définie dans la partie 1.2. h' a pour expression complexe

$$z' = -\frac{1}{2}z + 3 - \frac{3}{2}i$$

Déterminer l'expression complexe de g' .

$$R_{(\Omega, \frac{\pi}{2})} : z_1 = iz + 2$$

h' :

$$\begin{aligned} z' &= -\frac{1}{2}z_1 + 3 - \frac{3}{2}i \\ &= -\frac{1}{2}(iz + 2) + 3 - \frac{3}{2}i \\ &= -\frac{i}{2}z - 1 + 3 - \frac{3}{2}i \\ &= -\frac{i}{2}z + 2 - \frac{3}{2}i \end{aligned}$$

- Montrer que la transformation g' admet un point fixe $Q(q)$ et que l'expression complexe de g' est : $z' - q = -\frac{i}{2}(z - q)$.

z est l'affixe d'un point fixe de g' si et seulement si

$$\begin{aligned} z &= -\frac{i}{2}z + 2 - \frac{3}{2}i \\ \text{i.e. } z + \frac{i}{2}z &= 2 - \frac{3}{2}i \\ \text{i.e. } z \left(1 + \frac{i}{2}\right) &= 2 - \frac{3}{2}i \\ \text{i.e. } z \left(\frac{2+i}{2}\right) &= 2 - \frac{3}{2}i \\ \text{i.e. } z &= \frac{2(2 - \frac{3}{2}i)}{2+i} \\ \text{i.e. } z &= \frac{4-3i}{2+i} \\ \text{i.e. } z &= \frac{(4-3i)(2-i)}{(2+i)(2-i)} \\ \text{i.e. } z &= \frac{8-4i-6i+3i^2}{4+1} \\ \text{i.e. } z &= \frac{8-10i-3}{5} \\ \text{i.e. } z &= \frac{5-10i}{5} \\ \text{i.e. } z &= 1-2i \end{aligned}$$

Donc $q = 1 - 2i$.

Vérification :

$$\begin{aligned} z' - (1 - 2i) &= -\frac{i}{2}z + 2 - \frac{3}{2}i - 1 + 2i \\ &= -\frac{i}{2}z + 1 + \frac{1}{2}i \\ &= -\frac{i}{2}(z - (1 - 2i)) \\ &= -\frac{i}{2}z + \frac{i}{2}(1 - 2i) \\ &= -\frac{i}{2}z + \frac{i}{2} + 1 \\ &= -\frac{i}{2}z + 1 + \frac{i}{2} \end{aligned}$$

En déduire que

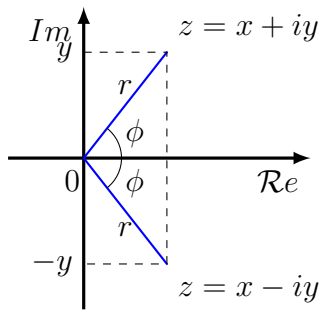
$$g' = h_{(Q, -\frac{1}{2})} \circ R_{(Q, \frac{\pi}{2})} = R_{(Q, \frac{\pi}{2})} \circ h_{(Q, -\frac{1}{2})}$$

L'expression $z' - q = -\frac{i}{2}(z - q)$ montre que g' est la composée d'une homothétie de rapport $\left|-\frac{i}{2}\right| = \frac{1}{2}$ et d'une rotation d'angle $\arg\left(-\frac{i}{2}\right) = \arg(-i) = -\frac{\pi}{2}$. Donc g' s'écrit comme la composée d'une homothétie de rapport $\frac{1}{2}$ et d'une rotation d'angle $-\frac{\pi}{2}$, toutes deux de centre Q .

Remarque : Comme pour la translation et l'homothétie, on pourra remarquer que l'expression complexe d'une rotation est de la forme : $z' = az + b$ avec $(a; b) \in \mathbb{C}^2$ et $a \neq 0$. Plus précisément :

- Dans le cas d'une translation : $a = 1$.
- Dans le cas d'une homothétie : $a \in \mathbb{R}^*$.
- Dans le cas d'une rotation : $a \neq 1$ et $|a| = 1$.

D. La réflexion s_0 d'axe l'axe des réels



■ DÉFINITION :

Si $z = a + ib$ où $(a; b) \in \mathbb{R}^2$ alors $\bar{z} = a - ib$ donc $M(z)$ et $M'(\bar{z})$ sont symétriques par rapport à l'axe des réels. Ainsi, l'expression complexe de cette réflexion est :

$$z' = \bar{z}$$

Notation : On note s_0 cette réflexion.

Exemple :

On considère la transformation s d'expression complexe : $z' = (1 + i)\bar{z} - 1 - i$.

- Donner l'expression complexe de la transformation $s' = s \circ s_0$.

$$s_0 : z_1 = \bar{z}$$

$s :$

$$\begin{aligned} z' &= (1 + i)\bar{z}_1 - 1 - i \\ &= (1 + i)z - 1 - i \end{aligned}$$

Donc $s' = s \circ s_0$ a pour expression :

$$z' = (1 + i)z - 1 - i$$

- Montrer que s' admet un point fixe $\Omega(\omega)$.

Soit z un point fixe de s' . Alors :

$$z = (1 + i)z - 1 - i$$

$$z(1 - (1 + i)) = -1 - i$$

$$-iz = -(1 + i)$$

$$z = \frac{1 + i}{i} = \frac{(1 + i)(-i)}{i \times (-i)} = \frac{-i + 1}{1} = 1 - i$$

Donc s' admet un unique point fixe Ω d'affixe $\omega = 1 - i$.

- Montrer que $s' = h \circ r$ où $h = H_{(\Omega, \sqrt{2})}$ et $r = R_{(\Omega, \frac{\pi}{4})}$.

Rappelons que $\omega = 1 - i$ et que s' a pour expression $z' = (1 + i)z - 1 - i$.

Exprimons $z' - \omega$ en fonction de $z - \omega$:

$$\begin{aligned} z' - \omega &= (1 + i)z - 1 - i - (1 - i) \\ &= (1 + i)z - 2 \\ &= (1 + i)z - (1 + i)(1 - i) \\ &= (1 + i)(z - (1 - i)) \\ &= (1 + i)(z - \omega) \end{aligned}$$

Or $1 + i = \sqrt{2} e^{i\frac{\pi}{4}}$, donc :

$$z' - \omega = \sqrt{2} e^{i\frac{\pi}{4}} (z - \omega)$$

D'autre part, l'expression de $r = R_{(\Omega, \frac{\pi}{4})}$ est $z' - \omega = e^{i\frac{\pi}{4}}(z - \omega)$, et celle de $h = H_{(\Omega, \sqrt{2})}$ est $z' - \omega = \sqrt{2}(z - \omega)$.

La composée $h \circ r$ (rappelons qu'on applique d'abord r , puis h) a donc pour expression :

$$\begin{aligned} z'' - \omega &= \sqrt{2}(z' - \omega) \\ &= \sqrt{2} e^{i\frac{\pi}{4}} (z - \omega) \\ &= (1 + i)(z - \omega) \end{aligned}$$

On retrouve bien l'expression de s' , donc

$$s' = h \circ r$$

2. Généralités sur les similitudes

■ DÉFINITION :

On appelle **similitude du plan** toute transformation du plan qui conserve les rapports de distance, c'est-à-dire que, pour tous points du plan M, N, P et Q d'images respectives M', N', P' et Q' où $M \neq N$:

$$\frac{P'Q'}{M'N'} = \frac{PQ}{MN}$$

Remarque : Une similitude est une transformation du plan, donc une bijection du plan sur lui-même et donc $M' = N'$ implique $M = N$: ainsi $M \neq N$ implique $M' \neq N'$.

Exemples :

- Toute **isométrie du plan** (c'est-à-dire toute transformation conservant les distances) vérifie $P'Q' = PQ$ et $M'N' = MN$, donc

$$\frac{P'Q'}{M'N'} = \frac{PQ}{MN}$$

et c'est donc une similitude. Ainsi, les translations, réflexions, rotations, symétrie centrale (c'est-à-dire homothétie de rapport -1) sont des similitudes.

- Une homothétie de rapport $k \in \mathbb{R}^*$ vérifie, d'après la propriété fondamentale des homothéties :

$$\frac{P'Q'}{M'N'} = \frac{|k|PQ}{|k|MN} = \frac{PQ}{MN}$$

et c'est donc une similitude.

■ PROPRIÉTÉ :

Une transformation f du plan est une similitude si et seulement si elle multiplie les distances par un réel $k > 0$. Le réel positif k s'appelle le **rapport** de cette similitude.

Démonstration.

($\Rightarrow$) Soit f une similitude et A, B deux points distincts fixés. Si M et N sont deux points quelconques du plan également distincts, alors par définition $\frac{M'N'}{A'B'} = \frac{MN}{AB}$ et donc : $M'N' = \frac{A'B'}{AB} \times MN$.

Si l'on note k le rapport $\frac{A'B'}{AB}$ alors on a montré que pour tous points M et N : $M'N' = k \times MN$, c'est-à-dire que la similitude f multiplie les distances par k .

($\Leftarrow$) Réciproquement, si pour tous points M et N ,

$$M'N' = k \times MN$$

alors, pour tous points du plan $M \neq N$ et $P \neq Q$,

$$\frac{P'Q'}{M'N'} = \frac{k \times PQ}{k \times MN} = \frac{PQ}{MN}$$

ce qui montre que f est une similitude. $\square$

Exemples :

- Une homothétie de rapport k est une similitude de rapport $|k|$ (bien avoir en tête que le rapport d'une similitude est toujours un nombre positif).
- On a montré dans l'exemple de la partie 1.D que la transformation s' d'expression complexe

$$z' = (1+i)\bar{z} - 1 - i$$

s'écrit sous la forme $s' = h \circ r$ où $h = H_{(\Omega, \sqrt{2})}$ et $r = R_{(\Omega, \frac{\pi}{4})}$.

Or, h est une similitude de rapport $\sqrt{2}$ et r une isométrie donc leur composée s' multiplie les distances par $\sqrt{2} \times 1 = \sqrt{2}$ et donc c'est une similitude de rapport $\sqrt{2}$.

On peut remarquer que s' n'est ni une isométrie ni une homothétie (elle ne transforme pas une droite en une droite parallèle).

■ PROPRIÉTÉ :

La composée de deux similitudes de rapports respectifs k et k' est une similitude de rapport $k \times k'$.

La réciproque d'une similitude de rapport k est une similitude de rapport $\frac{1}{k}$.

Exemple :

Reprenons l'exemple précédent : $s' = h \circ r$ donc

$$\begin{aligned} s'^{-1} &= r^{-1} \circ h^{-1} \\ &= R_{(\Omega, -\frac{\pi}{4})} \circ H_{(\Omega, \frac{1}{\sqrt{2}})} \end{aligned}$$

Remarque : Cette propriété et l'exemple précédent montrent qu'on peut fabriquer des similitudes qui ne sont pas des transformations connues jusqu'à présent. D'où des questions qu'on peut se poser (et auxquelles on ne répondra pas dans ce cours, mais on pourrait !) : peut-on dresser un catalogue exhaustif des différents types de similitudes ?

3. Similitudes directes

Certaines similitudes conservent les angles orientés au sens où, avec les notations utilisées jusque-là :
pour tous points $M \neq N$ et $P \neq Q$:

$$(\overrightarrow{MN}; \overrightarrow{PQ}) = (\overrightarrow{M'N'}; \overrightarrow{P'Q'})[2\pi]$$

c'est le cas des translations, rotations et homothéties de tous rapports. En revanche, par exemple, la réflexion s_0 change un angle orienté en son opposé, donc elle ne conserve pas les angles orientés

Remarque : On ne s'intéressera pas au type de similitudes qui changent un angle orienté en son opposé, elles sont hors-programme du bac franco-allemand. On les appelle des **similitudes indirectes**.

■ DÉFINITION :

On appelle **similitude directe**, toute similitude qui conserve les angles orientés.

Exemples :

Outre les translations, rotations et homothéties, il est clair que la composée de deux similitudes directes est encore une similitude directe.

■ THÉORÈME :

Soit f une application du plan complexe.

- f est une similitude directe si et seulement si f admet une écriture complexe de la forme : $z' = az + b$ où $(a; b) \in \mathbb{C}^* \times \mathbb{C}$.
- Si la similitude directe f a pour écriture complexe : $z' = az + b$ où $(a; b) \in \mathbb{C}^* \times \mathbb{C}$ alors son rapport est $|a|$.

Remarque : On a déjà observé que les écritures complexes des translations, rotations, homothéties ont bien cette forme.

De plus, le rapport de chacune de ces similitudes est :

- $1 = |1|$ pour une translation d'expression complexe $z' = 1 \times z + b$
- $1 = |e^{i\alpha}|$ pour une rotation d'expression complexe $z' = e^{i\alpha}z + \omega(1 - e^{i\alpha})$ où $\alpha \not\equiv 0 [2\pi]$
- $|k|$ pour une homothétie d'expression complexe $z' = kz + \omega(1 - k)$ pour $k \neq 0$.

Dans chaque cas le rapport est bien $|a|$ où a est le complexe tel que : $z' = az + b$.

Démonstration.

($\Leftarrow$) Soit f une application d'écriture complexe

$$z' = az + b$$

où $(a; b) \in \mathbb{C}^* \times \mathbb{C}$.

Comme $z' = az + b \Leftrightarrow z = \frac{z' - b}{a}$ car $a \neq 0$, on en déduit que tout $M'(z')$ admet un unique antécédent par f , ce qui montre que f est bijective, donc est une transformation du plan.

Il reste à prouver que f est une similitude et qu'elle conserve les angles orientés.

En notant z_1, z_2, z_3, z_4 les affixes respectives des points $M \neq N, P \neq Q$ et de même z'_1, z'_2, z'_3, z'_4 les affixes respectives des points M', N', P', Q' :

$$\begin{aligned} \frac{P'Q'}{M'N'} &= \frac{|z'_4 - z'_3|}{|z'_2 - z'_1|} \\ &= \frac{|az_4 + b - az_3 - b|}{|az_2 + b - az_1 - b|} \\ &= \frac{|a(z_4 - z_3)|}{|a(z_2 - z_1)|} \\ &= \frac{|a||z_4 - z_3|}{|a||z_2 - z_1|} \\ &= \frac{|z_4 - z_3|}{|z_2 - z_1|} \\ &= \frac{PQ}{MN} \end{aligned}$$

ainsi f conserve les rapports de distances donc c'est une similitude. De plus,

$$(\overrightarrow{MN}; \overrightarrow{PQ}) \equiv \arg \left(\frac{z_4 - z_3}{z_2 - z_1} \right) [2\pi]$$

et

$$\begin{aligned} (\overrightarrow{M'N'}; \overrightarrow{P'Q'}) &\equiv \arg \left(\frac{z'_4 - z'_3}{z'_2 - z'_1} \right) [2\pi] \\ &\equiv \arg \left(\frac{a(z_4 - z_3)}{a(z_2 - z_1)} \right) [2\pi] \\ &\equiv \arg \left(\frac{z_4 - z_3}{z_2 - z_1} \right) [2\pi] \end{aligned}$$

Ainsi la similitude f conserve les angles orientés et elle est donc directe.

Remarquons de plus que :

$$\begin{aligned} \frac{M'N'}{MN} &= \frac{|az_2 + b - az_1 - b|}{|z_2 - z_1|} \\ &= \frac{|a(z_2 - z_1)|}{|z_2 - z_1|} \\ &= |a| \end{aligned}$$

ce qui montre que le rapport de la similitude directe f est $|a|$ et prouve la seconde assertion.

($\Rightarrow$) Soit f une similitude directe du plan.
 Montrons qu'elle admet une écriture complexe de la forme $z' = az + b$ où $(a; b) \in \mathbb{C}^* \times \mathbb{C}$.
 On considère le point $A(1)$ et l'origine O . On note $A' = f(A)$ et $O' = f(O)$.
 Comme f est une similitude, elle conserve les rapports de distances et donc : pour tout point $M(z)$ d'image $M'(z')$ par f

$$\frac{O'M'}{O'A'} = \frac{OM}{OA}$$

autrement dit :

$$\left| \frac{z' - z_{O'}}{z_{A'} - z_{O'}} \right| = k \left| \frac{z - 0}{1 - 0} \right|$$

et donc :

$$\left| \frac{z' - z_{O'}}{z_{A'} - z_{O'}} \right| = k|z|$$

Comme f est une similitude directe, elle conserve les angles orientés et donc avec les mêmes notations et en supposant de plus $z \neq 0$ (pour assurer l'existence des angles considérés) : $(\overrightarrow{O'A'}; \overrightarrow{O'M'}) = (\overrightarrow{OA}; \overrightarrow{OM})[2\pi]$, autrement dit

$$\arg \left(\frac{z' - z_{O'}}{z_{A'} - z_{O'}} \right) = \arg \left(\frac{z - 0}{1 - 0} \right) [2\pi]$$

et donc :

$$\arg \left(\frac{z' - z_{O'}}{z_{A'} - z_{O'}} \right) = \arg(z)[2\pi]$$

Donc, les nombres complexes $\frac{z' - z_{O'}}{z_{A'} - z_{O'}}$ et z ont même module et même argument, donc sont égaux. Ainsi : $\frac{z' - z_{O'}}{z_{A'} - z_{O'}} = z$ donc :

$$z' = z_{O'} + z(z_{A'} - z_{O'})$$

donc il existe un couple

$$(a; b) = (z_{A'} - z_{O'}; z_{O'}) \in \mathbb{C}^* \times \mathbb{C}$$

tel que, pour tout $z \in \mathbb{C}^*$, $z' = az + b$.

On constate que si $z = 0$, i.e. pour $M = O$, la relation est encore vraie puisque $z' = z_{O'} = b$.

□

Exemple :

Soit f la transformation du plan définie par son expression complexe : $z' = (2 + i)z + 7 - 4i$.

- Montrer que f est une similitude directe dont on précisera le rapport.

f a la forme $z' = az + b$ avec $a = 2 + i \neq 0$ et $b = 7 - 4i$. Donc f est une similitude directe de rapport $|a| = |2 + i| = \sqrt{4 + 1} = \sqrt{5}$.

- Montrer que f admet un point fixe $\Omega(\omega)$.
 z est un point fixe de f si et seulement si

$$\begin{aligned} z &= (2 + i)z + 7 - 4i \text{ i.e. } z - (2 + i)z = 7 - 4i \\ &\text{i.e. } z(1 - 2 - i) = 7 - 4i \\ &\text{i.e. } z(-1 - i) = 7 - 4i \\ &\text{i.e. } z = \frac{7 - 4i}{-1 - i} \\ &\text{i.e. } z = \frac{(7 - 4i)(-1 + i)}{(-1 - i)(-1 + i)} \\ &\text{i.e. } z = \frac{-7 + 7i + 4i - 4i^2}{1 + 1} \\ &\text{i.e. } z = \frac{-7 + 11i + 4}{2} \\ &\text{i.e. } z = \frac{-3 + 11i}{2} \end{aligned}$$

$$\text{Donc } \omega = \frac{-3 + 11i}{2}.$$

- Montrer que : $f = h \circ r$ où $h = H_{(\Omega, \sqrt{5})}$ et $r = R_{(\Omega, \arg(2+i))}$. A-t-on $f = r \circ h$?

$$\begin{aligned} z' - \omega &= (2 + i)z + 7 - 4i - \omega \\ &= (2 + i)z + 7 - 4i - \frac{-3 + 11i}{2} \\ &= (2 + i)z + \frac{14 - 8i + 3 - 11i}{2} \\ &= (2 + i)z + \frac{17 - 19i}{2} \end{aligned}$$

Il faut vérifier que $(2 + i)\omega + 7 - 4i = \omega$, ce qui donne $7 - 4i = \omega - (2 + i)\omega = \omega(1 - 2 - i)$
 $= \omega(-1 - i)$. Donc $\omega = \frac{7 - 4i}{-1 - i}$ ce qui correspond à notre calcul. Ainsi $z' - \omega = (2 + i)(z - \omega)$.

Or $2 + i = \sqrt{5} \times e^{i \arg(2+i)}$ donc f est la composée de l'homothétie de rapport $\sqrt{5}$ et de la rotation d'angle de mesure $\arg(2 + i)$, toutes deux de centre Ω .

Ainsi, on a $f = r \circ h$ car l'homothétie et la rotation, étant de même centre, commutent.

■ THÉORÈME :

Soient A, B, A' et B' quatre points quelconques du plan tels que $A \neq B$ et $A' \neq B'$. Alors il existe une et une seule similitude directe f telle que : $f(A) = A'$ et $f(B) = B'$.

Démonstration. Le théorème précédent assure que : montrer l'existence de f revient à montrer l'existence d'un couple $(a; b) \in \mathbb{C}^* \times \mathbb{C}$ tel que l'expression complexe de f est $z' = az + b$.

Or

$$\begin{aligned} & (f(A) = A' \text{ et } f(B) = B') \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} z_{A'} = az_A + b \\ z_{B'} = az_B + b \end{cases} \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} z_{A'} - z_{B'} = a(z_A - z_B) \\ b = z_{A'} - az_A \end{cases} \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} a = \frac{z_{A'} - z_{B'}}{z_A - z_B} \\ b = z_{A'} - \frac{z_{A'} - z_{B'}}{z_A - z_B} \times z_A \end{cases} \quad \text{car } A \neq B \end{aligned}$$

On observe de plus que $b \in \mathbb{C}$ et $a \in \mathbb{C}^*$ car $A' \neq B'$, et que le couple $(a; b) \in \mathbb{C}^* \times \mathbb{C}$ est défini de manière unique, ce qui achève la preuve. $\square$

Exemple :

Soient l'origine O , le point $A(1)$, le point $A'(i)$ et le point $B'(1+2i)$. Déterminer l'expression complexe de l'unique similitude directe s telle que : $s(O) = A'$ et $s(A) = B'$. Préciser son rapport.

$$\begin{aligned} z_O &= 0, z_A = 1, z_{A'} = i, z_{B'} = 1 + 2i \\ a &= \frac{z_{B'} - z_{A'}}{z_A - z_O} = \frac{(1+2i) - i}{1 - 0} = \frac{1+i}{1} = 1+i \end{aligned}$$

$$b = z_{A'} - az_O = i - (1+i) \times 0 = i$$

Donc s a pour expression complexe : $z' = (1+i)z + i$.

Le rapport de s est $|1+i| = \sqrt{2}$.

■ THÉORÈME : (forme réduite d'une similitude directe)

- Toute similitude directe est soit une translation, soit la composée commutative d'une homothétie par une rotation de même centre.
- Toute similitude directe f qui n'est pas une translation s'écrit sous la forme dite **forme réduite** : $f = H_{(\Omega, \alpha)} \circ R_{(\Omega, k)} = R_{(\Omega, \alpha)} \circ H_{(\Omega, k)}$ où Ω est l'unique point fixe de f , $k > 0$ est son rapport et $\alpha = \arg(a)[2\pi]$ est son angle.

On dit alors que Ω est le **centre de la similitude**, et que α est l'**angle de la similitude**. On la note alors : $f = S_{(\Omega, k, \alpha)}$.

Démonstration. Soit f une similitude directe. D'après le théorème 1, il existe donc un couple $(a; b) \in \mathbb{C}^* \times \mathbb{C}$ tel que l'écriture complexe de f soit : $z' = az + b$. Alors :

- Si $a = 1$: $z' = z + b$ et f est donc la translation de vecteur $\vec{u}$ où $\text{Aff}(\vec{u}) = b$.
- Si $a \neq 1$: recherchons un point fixe de f : Ω est un point fixe de f si et seulement si

$$\begin{aligned} \omega &= a\omega + b \\ \text{i.e. } (1-a)\omega &= b \\ \text{i.e. } \omega &= \frac{b}{1-a} \quad \text{car } a \neq 1 \end{aligned}$$

Ainsi, f admet un unique point fixe Ω .

De plus, on déduit de : $\begin{cases} z' = az + b \\ \omega = a\omega + b \end{cases}$ par différence membre à membre que : $z' - \omega = a(z - \omega)$. En posant : $k = |a|$ et $\alpha = \arg(a)[2\pi]$, c'est-à-dire : $a = ke^{i\alpha}$, on obtient :

$$z' - \omega = ke^{i\alpha}(z - \omega)$$

Or, si :

$$M(z) \mapsto M_1(z_1) \mapsto M'(z')$$

où $M_1 = R_{(\Omega, \alpha)}(M)$ et $M' = H_{(\Omega, k)}(M_1)$, alors :

$$z_1 - \omega = e^{i\alpha}(z - \omega)$$

et

$$z' - \omega = k(z_1 - \omega)$$

d'où :

$$z' - \omega = ke^{i\alpha}(z - \omega)$$

ce qui montre que :

$$f = H_{(\Omega, k)} \circ R_{(\Omega, \alpha)}$$

On se convainc alors que de même :

$$f = R_{(\Omega, \alpha)} \circ H_{(\Omega, k)}$$

ce qui achève la preuve. $\square$

Exemple :

Soit $h = H_{(O, -2)}$ et $r = R_{(A, \frac{\pi}{3})}$ où $A(1 + 2i)$.
On pose : $f = h \circ r$.

- Justifier que f est une similitude directe.
Quel est son rapport ?

f est la composée d'une homothétie (similitude directe de rapport 2) et d'une rotation (similitude directe de rapport 1). Donc f est une similitude directe de rapport $2 \times 1 = 2$.

- Soit $M(2i)$. Construire l'image M' de M par la similitude f : donner l'abscisse de M' .

$$\begin{aligned} z_1 - (1 + 2i) &= e^{i\frac{\pi}{3}}((2i) - (1 + 2i)) \\ &= -e^{i\frac{\pi}{3}} \\ &= -\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \\ &= -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} \end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned} z_1 &= 1 + 2i - \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} \\ &= \frac{1}{2} + i\left(2 - \frac{\sqrt{3}}{2}\right) \end{aligned}$$

Puis, on applique l'homothétie h ,

$$\begin{aligned} z' &= -2z_1 = -2\left(\frac{1}{2} + i\left(2 - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right) \\ &= -1 - 2i\left(2 - \frac{\sqrt{3}}{2}\right) \\ &= -1 - i(4 - \sqrt{3}) \end{aligned}$$

- Donner l'écriture complexe de la similitude f .
Retrouver avec cette expression l'abscisse de M' .

$$\begin{aligned} z_1 - (1 + 2i) &= e^{i\frac{\pi}{3}}(z - (1 + 2i)) \\ \Leftrightarrow z_1 &= e^{i\frac{\pi}{3}}z + (1 + 2i)(1 - e^{i\frac{\pi}{3}}) \\ \Leftrightarrow z_1 &= e^{i\frac{\pi}{3}}z + (1 + 2i)\left(1 - \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \\ \Leftrightarrow z_1 &= e^{i\frac{\pi}{3}}z + (1 + 2i)\left(\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \end{aligned}$$

Puis, avec h

$$z' = -2z_1 = -2e^{i\frac{\pi}{3}}z - 2(1 + 2i)\left(\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

Avec $e^{i\frac{\pi}{3}} = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$: $z' = -2\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)z + b$

où b est une constante complexe.

$$z' = (-1 - i\sqrt{3})z + b$$

- Donner la forme réduite de la similitude f .
Vérifier la construction du point M' en utilisant la forme réduite de f .

L'expression de f est $z' = az + b$ où $a = -1 - i\sqrt{3}$.
Puis, $|a| = |-1 - i\sqrt{3}| = \sqrt{1 + 3} = 2$.

De plus, $\arg(a) = \arg(-1 - i\sqrt{3})$

Or,

$$\begin{aligned} -1 - i\sqrt{3} &= -1(1 + i\sqrt{3}) \\ &= -1 \times 2e^{i\frac{\pi}{3}} \\ &= 2e^{i(\pi + \frac{\pi}{3})} \\ &= 2e^{i\frac{4\pi}{3}} \end{aligned}$$

$$\text{Donc } \arg(a) \equiv \frac{4\pi}{3} [2\pi]$$

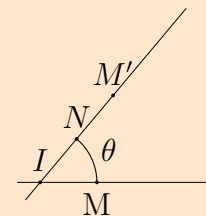
Le centre Ω est le point fixe, d'abscisse $\omega = \frac{b}{1 - a}$.

$$f = S_{(\Omega, 2, \frac{4\pi}{3})} = H_{(\Omega, 2)} \circ R_{(\Omega, \frac{4\pi}{3})}$$

■ PROPRIÉTÉ :

- Si la similitude directe f n'est pas une translation et a pour centre I , pour rapport $k > 0$ et pour angle α , alors pour tout point $M \neq I$, l'image M' de M est caractérisée par

$$\begin{cases} IM' = k \times IM \\ (\overrightarrow{IM}; \overrightarrow{IM'}) = \alpha [2\pi] \end{cases}$$



Si $M = I$, alors $M' = I$.

- I , M et M' étant trois points non alignés, l'unique similitude directe de centre I qui transforme M en M' est la similitude $S_{(I, \frac{IM'}{IM}, (\overrightarrow{IM}; \overrightarrow{IM'}))}$.
- Si la similitude directe f a pour expression complexe $z' = az + b$ avec $a \in \mathbb{C}^*$ et $a \neq 1$ alors, son centre I est son unique point fixe, son rapport est $k = |a|$ et son angle est $\alpha = \arg(a)[2\pi]$.
- Si la similitude f a pour rapport k et pour angle α , alors pour tous les points A, B, A', B' avec $A \neq B$: $k = \frac{A'B'}{AB}$ et $\alpha = (\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{A'B'})[2\pi]$.