

Partie A

1. Pour tous réels a et b positifs, $p(a \leq T \leq b) = \int_a^b \lambda e^{-\lambda t} dt = [-e^{-\lambda t}]_a^b = e^{-\lambda a} - e^{-\lambda b}$.

En particulier, $p(0 \leq T \leq b) = 1 - e^{-\lambda b}$.

$$P(0 \leq T \leq 24) = 0,03 \Leftrightarrow 1 - e^{-24\lambda} = 0,03$$

$$\Leftrightarrow 0,97 = e^{-24\lambda}$$

$$\Leftrightarrow \ln(0,97) = -24\lambda$$

$$\Leftrightarrow \lambda = \frac{\ln(0,97)}{-24} \approx 0,001269$$

On prendra $\lambda = 0,00127$.

2. $p(24 \leq T \leq 48) = e^{-24\lambda} - e^{-48\lambda} \approx 0,0291$.

La probabilité que la durée de fonctionnement du module électronique soit comprise entre 24 et 48 mois est 0,0291.

3. Le module électronique du climatiseur fonctionne depuis 36 mois. La variable aléatoire T qui suit une loi exponentielle de paramètre λ est sans vieillissement donc, $p_{T \geq 36}(T \geq 36 + 12) = p(T \geq 12) = e^{-12\lambda} \approx 0,9849$.
La probabilité qu'il fonctionne encore les 12 mois suivants est 0,9849.

Partie B

1. D'après la calculatrice, $p(M) = p(98 \leq X \leq 102) \approx 0,955$.

On utilise : NormalFRep(98, 102, 100, 1)

2. $p(98 \leq X \leq 102) = 0,97 \Leftrightarrow p(-2 \leq X - 100 \leq 2) = 0,97$

$$\Leftrightarrow p\left(\frac{-2}{\sigma} \leq \frac{X - 100}{\sigma} \leq \frac{2}{\sigma}\right) = 0,97$$

Si X suit une loi normale d'espérance $\mu = 100$ et d'écart-type σ , alors

$Z = \frac{X - 100}{\sigma}$ suit la loi normale centrée réduite.

1^{re} méthode : D'après la calculatrice, $\frac{2}{\sigma} \approx 2,1701$, d'où $\sigma \approx 0,922$.

On utilise : FracNormal (0.97, 0, 1, CENTER)

$$2^{\text{e}} \text{ méthode : } p\left(\frac{-2}{\sigma} \leq Z \leq \frac{2}{\sigma}\right) = 0,97 \Leftrightarrow p\left(Z \leq -\frac{2}{\sigma}\right) = \frac{1 - 0,97}{2} = 0,015$$

(on peut s'aider de la courbe de Gauss)

D'après la calculatrice, $-\frac{2}{\sigma} \approx -2,1701$ d'où $\sigma \approx 0,922$.

On utilise : FracNormal (0.015, 0, 1, LEFT)

Partie C

1. En posant $n = 500$ et $p = 0,03$, on a bien :

$$n \geq 30 ; np = 500 \times 0,03 = 15 \text{ et on a bien } 15 \geq 5, \text{ et}$$

$$n(1 - p) = 500 \times 0,97 = 485 \text{ et on a bien } 485 \geq 5.$$

Les trois conditions sont vérifiées.

Un intervalle de fluctuation asymptotique au seuil de 95 % est :

$$I = \left[p - 1,96 \frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}} ; p + 1,96 \frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}} \right] \text{ avec } p = 0,03 \text{ et } n = 500 \text{ donc}$$

$$0,03 - 1,96 \frac{\sqrt{0,03 \times 0,97}}{\sqrt{500}} \approx 0,015 \text{ (par défaut)}$$

$$\text{et } 0,03 + 1,96 \frac{\sqrt{0,03 \times 0,97}}{\sqrt{500}} \approx 0,045 \text{ (par excès) soit } I = [a; b] \text{ avec } a \approx 0,015 \text{ et}$$

$$b \approx 0,045. \text{ Or la fréquence observée sur l'échantillon est } f_{\text{obs}} = \frac{19}{500} = 0,038.$$

$f_{\text{obs}} \in I$ donc ce contrôle ne remet pas en cause le fait que le stock comprenne 3 % de cadenas défectueux.

2. En posant $n = 500$ et $f = \frac{39}{500}$, on a bien

$$n \geq 30 ; np = 500 \times \frac{39}{500} = 39 \text{ et on a bien } 39 \geq 5, \text{ et}$$

$$n(1 - p) = 500 \times \frac{61}{500} = 61 \text{ et on a bien } 61 \geq 5.$$

Un intervalle de confiance, au seuil de confiance de 95%, est :

$$I_C = \left[f - \frac{1}{\sqrt{n}} ; f + \frac{1}{\sqrt{n}} \right] \text{ avec } f = \frac{39}{500} \text{ et } n = 500 \text{ donc}$$

$$I_C = [a; b] \text{ avec } a \approx 0,033 \text{ et } b \approx 0,123.$$