

T-S	DS 10 de mathématiques	24 mai 2019
Calculatrice autorisée		Une heure

Les parties suivantes sont indépendantes.

Partie A

Les probabilités demandées seront arrondies à 10^{-4}

Un modèle de climatiseur d'automobile possède un module électronique. Si le module subit une panne, il est changé. Sur le même modèle de climatiseur, l'enseigne d'entretien automobile a constaté que la durée de fonctionnement (en mois) du module électronique peut être modélisée par une variable aléatoire T qui suit une loi exponentielle de paramètre λ .

1. Déterminer la valeur exacte de λ , sachant que le service statistique indique que $p(0 \leq T \leq 24) = 0,03$.
Pour la suite de cet exercice, on prendra $\lambda = 0,00127$.
2. Déterminer la probabilité que la durée de fonctionnement du module électronique soit comprise entre 24 et 48 mois.
3. Le module électronique du climatiseur fonctionne depuis 36 mois.
Déterminer la probabilité qu'il fonctionne encore les 12 mois suivants.

Partie B

Les résultats seront arrondis au millième

Une entreprise fabrique des tablettes de chocolat de 100 grammes.

Pour être mise sur le marché, la tablette subit un contrôle : Une tablette de chocolat doit peser 100 grammes avec une tolérance de deux grammes en plus ou en moins. Elle est donc mise sur le marché si sa masse est comprise entre 98 et 102 grammes.

La masse, exprimée en grammes, d'une tablette de chocolat peut être modélisée par une variable aléatoire X suivant la loi normale d'espérance $\mu = 100$ et d'écart-type $\sigma = 1$. Le réglage des machines de la chaîne de fabrication permet de modifier la valeur de σ .

1. Calculer la probabilité de l'événement M : « la tablette est mise sur le marché ».
2. On souhaite modifier le réglage des machines de telle sorte que la probabilité de cet événement atteigne 0,97.
Déterminer la valeur de σ pour que la probabilité de l'événement « la tablette est mise sur le marché » soit égale à 0,97.

Partie C

Tous les résultats demandés dans cet exercice seront arrondis au millième.

Un fournisseur produit deux sortes de cadenas.

Les uns sont « premier prix », et les autres sont « haut de gamme ».

Un magasin de bricolage dispose d'un stock de cadenas provenant de ce fournisseur ; ce stock comprend un grand nombre de cadenas de chaque type.

1. Le fournisseur affirme que, parmi les cadenas « haut de gamme », il y a 3 % de cadenas défectueux dans sa production.

Le responsable du magasin de bricolage désire vérifier la validité de cette affirmation dans son stock.

À cet effet, il prélève un échantillon aléatoire de 500 cadenas « haut de gamme », et en trouve 19 qui sont défectueux.

Ce contrôle remet-il en cause le fait que le stock comprenne 3% de cadenas défectueux ?
2. Le responsable du magasin souhaite estimer la proportion de cadenas défectueux dans son stock de cadenas « premier prix ».

Pour cela, il prélève un premier échantillon aléatoire de 500 cadenas premier prix, parmi lesquels 39 se révèlent défectueux.

Donner un intervalle de confiance de cette proportion au niveau de confiance 95 %.

Partie A

1. Pour tous réels a et b positifs, $p(a \leq T \leq b) = \int_a^b \lambda e^{-\lambda t} dt = [-e^{-\lambda t}]_a^b = e^{-\lambda a} - e^{-\lambda b}$.

En particulier, $p(0 \leq T \leq b) = 1 - e^{-\lambda b}$.

$$P(0 \leq T \leq 24) = 0,03 \Leftrightarrow 1 - e^{-24\lambda} = 0,03$$

$$\Leftrightarrow 0,97 = e^{-24\lambda}$$

$$\Leftrightarrow \ln(0,97) = -24\lambda$$

$$\Leftrightarrow \lambda = \frac{\ln(0,97)}{-24} \approx 0,001269$$

On prendra $\lambda = 0,00127$.

2. $p(24 \leq T \leq 48) = e^{-24\lambda} - e^{-48\lambda} \approx 0,0291$.

La probabilité que la durée de fonctionnement du module électronique soit comprise entre 24 et 48 mois est 0,0291.

3. Le module électronique du climatiseur fonctionne depuis 36 mois. La variable aléatoire T qui suit une loi exponentielle de paramètre λ est sans vieillissement donc, $p_{T \geq 36}(T \geq 36 + 12) = p(T \geq 12) = e^{-12\lambda} \approx 0,9849$.
La probabilité qu'il fonctionne encore les 12 mois suivants est 0,9849.

Partie B

1. D'après la calculatrice, $p(M) = p(98 \leq X \leq 102) \approx 0,955$.

On utilise : NormalFRep(98, 102, 100, 1)

2. $p(98 \leq X \leq 102) = 0,97 \Leftrightarrow p(-2 \leq X - 100 \leq 2) = 0,97$

$$\Leftrightarrow p\left(\frac{-2}{\sigma} \leq \frac{X - 100}{\sigma} \leq \frac{2}{\sigma}\right) = 0,97$$

Si X suit une loi normale d'espérance $\mu = 100$ et d'écart-type σ , alors

$Z = \frac{X - 100}{\sigma}$ suit la loi normale centrée réduite.

1^{re} méthode : D'après la calculatrice, $\frac{2}{\sigma} \approx 2,1701$, d'où $\sigma \approx 0,922$.

On utilise : FracNormal (0.97, 0, 1, CENTER)

$$2^{\text{e}} \text{ méthode : } p\left(\frac{-2}{\sigma} \leq Z \leq \frac{2}{\sigma}\right) = 0,97 \Leftrightarrow p\left(Z \leq -\frac{2}{\sigma}\right) = \frac{1 - 0,97}{2} = 0,015$$

(on peut s'aider de la courbe de Gauss)

D'après la calculatrice, $-\frac{2}{\sigma} \approx -2,1701$ d'où $\sigma \approx 0,922$.

On utilise : FracNormal (0.015, 0, 1, LEFT)

Partie C

1. En posant $n = 500$ et $p = 0,03$, on a bien :

$$n \geq 30 ; np = 500 \times 0,03 = 15 \text{ et on a bien } 15 \geq 5, \text{ et}$$

$$n(1 - p) = 500 \times 0,97 = 485 \text{ et on a bien } 485 \geq 5.$$

Les trois conditions sont vérifiées.

Un intervalle de fluctuation asymptotique au seuil de 95 % est :

$$I = \left[p - 1,96 \frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}} ; p + 1,96 \frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}} \right] \text{ avec } p = 0,03 \text{ et } n = 500 \text{ donc}$$

$$0,03 - 1,96 \frac{\sqrt{0,03 \times 0,97}}{\sqrt{500}} \approx 0,015 \text{ (par défaut)}$$

$$\text{et } 0,03 + 1,96 \frac{\sqrt{0,03 \times 0,97}}{\sqrt{500}} \approx 0,045 \text{ (par excès) soit } I = [a; b] \text{ avec } a \approx 0,015 \text{ et}$$

$$b \approx 0,045. \text{ Or la fréquence observée sur l'échantillon est } f_{\text{obs}} = \frac{19}{500} = 0,038.$$

$f_{\text{obs}} \in I$ donc ce contrôle ne remet pas en cause le fait que le stock comprenne 3 % de cadenas défectueux.

2. En posant $n = 500$ et $f = \frac{39}{500}$, on a bien

$$n \geq 30 ; np = 500 \times \frac{39}{500} = 39 \text{ et on a bien } 39 \geq 5, \text{ et}$$

$$n(1 - p) = 500 \times \frac{61}{500} = 61 \text{ et on a bien } 61 \geq 5.$$

Un intervalle de confiance, au seuil de confiance de 95%, est :

$$I_C = \left[f - \frac{1}{\sqrt{n}} ; f + \frac{1}{\sqrt{n}} \right] \text{ avec } f = \frac{39}{500} \text{ et } n = 500 \text{ donc}$$

$$I_C = [a; b] \text{ avec } a \approx 0,033 \text{ et } b \approx 0,123.$$