

Séquence XXVII – Échantillonnage

Exercice XXVII.1

(Lien avec l'intervalle vu en Seconde)

1. Déterminer les variations sur l'intervalle $[0; 1]$ de la fonction $x \mapsto x(1 - x)$.
2. En déduire que pour tout p de $]0; 1[$,
$$\sqrt{p(1 - p)} \leq \frac{1}{2}.$$
3. En notant I_n l'intervalle de fluctuation asymptotique au seuil de 95 %, en déduire que
$$I_n \subset J_n = \left[p - \frac{1}{\sqrt{n}}; p + \frac{1}{\sqrt{n}} \right].$$

Pourquoi peut-on dire que J_n est un intervalle de fluctuation asymptotique à un seuil au moins égal à celui de I_n ?

Exercice XXVII.2

La proportion de droitiers dans la population est d'environ 85 %.

Déterminer un intervalle de fluctuation asymptotique au seuil de 95 % de la fréquence des droitiers dans les échantillons de taille 400.

On arrondira les bornes à 10^{-3} près.

Exercice XXVII.3

On considère qu'une machine à former des pilules fonctionne de manière satisfaisante si le pourcentage de pilules défectueuses est de 1 pour 1000.

Sur un échantillon de 10 000 pilules, on a trouvé 15 pilules défectueuses.

On veut savoir si la machine est bien réglée.

1. Déterminer un intervalle de fluctuation asymptotique au niveau de confiance 0,95 de la fréquence de pilules défectueuses dans les échantillons de taille 10 000, prélevés au hasard et avec remise. (On arrondira les bornes de l'intervalle à 10^{-4} près.)
2. Énoncer la règle de décision permettant d'accepter ou non l'hypothèse $p = 0,001$ au seuil de 5 %. Conclure.

Exercice XXVII.4

On suppose qu'un élève choisi au hasard dans la population d'un lycée soit une fille est de 50 %. Dans une classe de 35 élèves, il y a 13 filles. Peut-on affirmer que les filles sont sous-représentées dans cette classe ?

Exercice XXVII.5

Une étude statistique a révélé que 60 % des ventes de cahier de format 24×32 sont des cahiers de la marque C.

1. Une petite papeterie prévoit de vendre 30 cahiers 24×32 , toutes marques confondues. Par rapport aux notations fixées au début de cette partie, que valent n et p ? Que représentent X_{30} ? F_{30} ? Déterminer l'intervalle de fluctuation asymptotique I_{30} au seuil de 95 % de la fréquence de cahiers 24×32 de la marque C dans l'échantillon de 30 cahiers. Combien de cahiers de la marque C cette papeterie doit-elle prévoir, afin de ne pas être en rupture de stock, avec une probabilité de 95 % ?
2. Répondre aux mêmes questions pour un supermarché prévoyant de vendre 1000 cahiers 24×32 .

Exercice XXVII.6

Les acariens sont responsables de 70 % des asthmes allergiques de l'enfant. On choisit au hasard un groupe de 300 enfants asthmatiques et on s'intéresse à ceux d'entre eux dont l'asthme est dû aux acariens.

1. Par rapport aux notations fixées au début de cette partie, que valent n et p ? Que représentent X_{300} ? F_{300} ?
2. Déterminer l'intervalle de fluctuation asymptotique au seuil de 95 % de la variable aléatoire F_{300} .
3. Déterminer avec une probabilité d'environ 95 % le nombre minimal et le nombre maximal d'enfants de l'échantillon présentant un asthme dû aux acariens.

Exercice XXVII.7

En 2011, le taux de réussite à un concours national d'enseignement dans une matière littéraire est de 53,7 %. On étudie les résultats de deux centres de formation à ce concours.

Dans le centre A : 48 candidats sur les 100 inscrits ont été admis. Dans le centre B : 252 candidats sur les 515 inscrits ont été admis.

Les résultats dans chacun de ces centres sont-ils représentatifs des résultats nationaux ?

Séquence XXVII – Estimation

Exercice XXVII.8

Dans une population donnée, on s'intéresse à la proportion de blonds. Dans un échantillon de taille 100, extrait de cette population, on a trouvé 22 blonds. Déterminer un intervalle de confiance de la proportion des blonds au niveau de confiance de 95 %.

Exercice XXVII.9

À l'occasion d'une élection, on réalise un sondage sur un échantillon de n personnes afin de connaître le pourcentage d'électeurs qui souhaitent voter pour un candidat donné. On suppose la population suffisamment importante pour que ce sondage soit assimilé à un tirage avec remise.

Quelle doit être la taille minimale de l'échantillon afin que l'intervalle de confiance de cette proportion au niveau de confiance 0,95 nous donne celle-ci à 0,01 près ?

Exercice XXVII.10

Une enquête sur la lecture de la presse en ligne a été réalisée en France auprès de 900 utilisateurs de tablettes numériques pris au hasard. Parmi ces 900 utilisateurs, 270 lisent de la presse en ligne. Donner l'intervalle de confiance au seuil de 95 % de la proportion p d'utilisateurs de tablettes numériques lisant de la presse en ligne, dans la population française.

Exercice XXVII.11

Lors d'un scrutin électoral, on souhaite connaître la proportion p de citoyens français souhaitant voter pour le candidat X. Un institut de sondage mène une enquête auprès de 1000 citoyens français en âge de voter. Le prélèvement de ce petit échantillon ne modifie pas la proportion p cherchée.

L'enquête indique qu'une proportion $f = 49$ % d'individus de l'échantillon souhaite voter pour le candidat X.

1. Déterminer l'intervalle de confiance au seuil 95 % pour p .
2. Peut-on affirmer, d'après ce sondage, que le candidat X sera battu ?

Exercice XXVII.12

Un cas réel, le 21 avril 2002.

Un sondage IPSOS réalisé les 17 et 18 avril 2002, trois jours avant le premier tour de l'élection présidentielle, auprès de 989 personnes constituant un échantillon représentatif de la population française en âge de voter, a donné les résultats suivants :

- 20 % d'intentions de vote pour Jacques Chirac.
- 18 % d'intentions de vote pour Lionel Jospin.
- 14 % d'intentions de vote pour Jean-Marie le Pen.

Les média se préparent donc à un second tour entre Jacques Chirac et Lionel Jospin.

1. Après avoir réalisé les calculs nécessaires, représenter les intervalles de confiance au seuil 95 % pour les intentions de vote p_1 , p_2 , p_3 en faveur des trois candidats Jacques Chirac, Lionel Jospin et Jean-Marie Le Pen respectivement.

2. Au soir du premier tour, le 21 avril 2002, les résultats sont les suivants :

- 19,88 % d'intention de vote pour Chirac
- 16,18 % d'intentions de vote pour Jospin.
- 16,86 % d'intentions de vote pour Le Pen.

Les pourcentages de voix recueillis par les trois candidats sont-ils bien dans l'intervalle de confiance au seuil 95 % ?

3. Pouvait-on, sur la base de ce sondage, écarter avec une confiance de 95 % l'un des trois candidats pour le second tour ?

Exercice XXVII.13

On effectue un sondage portant sur la proportion p d'intentions de vote en faveur d'un candidat aux élections.

1. Quelle est la précision du sondage au seuil de 95 % si 1000 personnes sont interrogées ? (la précision est l'amplitude de l'intervalle dans lequel se trouve l'estimation, c'est-à-dire la différence entre la borne supérieure et la borne inférieure de l'intervalle).
2. Quelle doit être la taille de l'échantillon de personnes interrogées afin que la précision de l'intervalle de confiance pour p au seuil 95 % soit inférieure à 1 % ?

Séquence XXVII – Exercices supplémentaires



Exercice XXVII.14

Le mildiou est une maladie qui touche environ 65% des plants de tomate en période d'humidité. Une jardinerie propose deux produits A et B pour traiter cette maladie.

Une association de consommateurs se livre à un test pour vérifier l'efficacité de ces produits.

Premier test : on forme un échantillon pris au hasard de 150 plants de tomates que l'on traite avec le produit A. Après quelques semaines, on compte 87 plants atteints du mildiou parmi les 150.

Peut-on considérer que le produit A est efficace ?

Second test : on forme un échantillon pris au hasard de 378 plants de tomates que l'on traite avec le produit B. Après quelques semaines, on compte 223 plants atteints du mildiou parmi les 378.

Peut-on considérer que le produit B est efficace ?



Exercice XXVII.15

On réalise une enquête auprès d'un échantillon de taille n de possesseurs de GPS, afin de déterminer la proportion p de possesseurs de GPS l'utilisant quotidiennement dans la population française.

Quelle doit être la taille n de l'échantillon afin que la précision de l'intervalle de confiance pour p au seuil 95% soit inférieure à 1% ?

