

Séquence XXVI – Probabilités continues

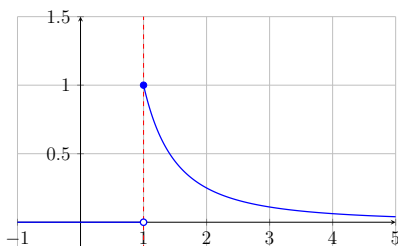
Généralités

Exercice XXVI.1

La fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x^2} & \text{si } x \geq 1 \\ 0 & \text{si } x < 1 \end{cases}$$

est une densité de probabilité.
Elle est représentée ci-dessous.



On considère une variable aléatoire X suivant la loi de densité f .

En utilisant le graphique et à l'aide de quelques calculs, donner les valeurs des probabilités suivantes : $P(X < 0)$, $P(X \geq 1)$ et $P(1 \leq X \leq 2)$

Exercice XXVI.2

Parmi les fonctions suivantes définies sur $\mathbb{R}$, déterminer lesquelles sont la densité d'une variable aléatoire à densité.

- $f_1(x) = \begin{cases} \cos x & \text{si } x \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right] \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$
- $f_2(x) = \begin{cases} 1+x & \text{si } x \in [-1; 0] \\ 1-x & \text{si } x \in [0; 1] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$
- $f_3(x) = \begin{cases} \frac{1}{|x|^3} & \text{si } |x| > 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

Exercice XXVI.3

La production X d'un produit, en tonnes, est une variable aléatoire continue qui prend ses valeurs dans $I = [0; 10]$ avec la densité de probabilité f définie par $f(x) = 0,0012x(10-x)^2$ pour $x \in I$ et valant 0 sinon.

1. Vérifier que f est bien une densité de probabilité.
2. (a) Calculer les probabilités des événements A : « $X \leq 7$ » et B : « la production dépasse 6 ».
- (b) Calculer $P_B(A)$ à 0,001 près.
- (c) Calculer $E(X)$, en justifiant. Interpréter.

Exercice XXVI.4

Indiquer si les affirmations sont vraies ou fausses, en justifiant. Soit Y une variable aléatoire suivant la loi uniforme sur $[2; 8]$.

1. La densité de probabilité de Y est la fonction g définie, pour tout $x \in [2; 8]$ par $g(x) = \frac{1}{6}$.
2. $P(3 \leq Y \leq 6) = 0,5$
3. $E(Y) = 5$

Exercice XXVI.5

Dans un service de maintenance, le temps d'attente avant d'être en contact avec un conseiller, exprimé en minutes, suit la loi uniforme sur $[0; 15]$.

1. Quelle est la probabilité qu'un client attende moins de 3 minutes ? Plus de 5 minutes ?
2. Quel est le temps moyen d'attente ?
3. Un client a attendu déjà 4 minutes. Quelle est la probabilité qu'il attende au moins 5 minutes de plus ?

Exercice XXVI.6

X est la variable aléatoire continue qui suit la loi uniforme sur $[0; 1]$. Calculer la probabilité de : $A = (X = 0,5)$, $B = (0,1 \leq X \leq 0,3)$, $C = (X \leq 0,2 \text{ ou } X \geq 0,99)$, puis $P_C(B)$ et $P_B(C)$.

Exercice XXVI.7

On choisit un nombre réel au hasard dans l'intervalle $[0; 2]$.

1. Quelle est la probabilité qu'il soit solution de l'inéquation $9x^2 - 33x + 10 > 0$?
2. Quelle est la probabilité qu'il soit solution de l'équation $9x^2 - 33x + 10 = 0$?

Exercice XXVI.8

Soit a et b deux réels, tels que $a < b$. Soit U une variable aléatoire qui suit la loi uniforme sur $[a; b]$. On considère la proposition suivante :
« Si $a = 3$ et $b = 7$, alors l'espérance de U est 5. »

1. Cette proposition est-elle vraie ? Justifier.
2. Énoncer la réciproque de cette proposition. Dire si elle est vraie ou fausse, en justifiant.

Séquence XXVI – Probabilités continues

Loi exponentielle

Exercice XXVI.9

X est une variable aléatoire qui suit la loi exponentielle de paramètre $\lambda = 0,2$. Calculer $P(X \leq 5)$, $P(X \geq 10)$ et $P(4 \leq X \leq 10)$.

Exercice XXVI.10

X est une variable aléatoire qui suit une loi exponentielle de paramètre λ .

On se propose de déterminer l'espérance de X . Celle-ci est la limite quand x tend vers $+\infty$ de la fonction : $x \mapsto \int_0^x tf(t) dt$, où f est la densité de probabilité de X .

1. Soit g la fonction définie sur $[0; +\infty[$ par

$$g(t) = tf(t)$$

Une primitive de g sur $[0; +\infty[$ est de la forme :

$$G(t) = (at + b)e^{-\lambda t}$$

où a et b sont deux nombres réels.

En dérivant G , puis par identification, déterminer la valeur de a et l'expression de b en fonction de λ .

2. Justifier que, pour tout réel $x \geq 0$,

$$\int_0^x tf(t) dt = -xe^{-\lambda x} - \frac{1}{\lambda}e^{-\lambda x} + \frac{1}{\lambda}$$

3. Exprimer alors $E(X)$ en fonction de λ .

Exercice XXVI.11

La durée de vie (en heures) d'un composant électronique a été modélisée par la loi exponentielle T de paramètre $\lambda = 0,005$.

- Quelle est la probabilité que ce composant ait une durée de vie inférieure à 100 heures ?
- Quelle est la probabilité que ce composant soit encore en état de marche au bout de 250 heures ?
- Calculer la durée de vie moyenne de ce composant.
- Un composant est encore en état de marche au bout de 200 heures. Calculer la probabilité qu'il soit encore en état de marche au bout de 250 heures.

Exercice XXVI.12

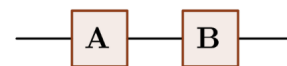
Un réparateur de vélos a acheté 30 % de son stock de pneus à un premier fournisseur, 40 % à un deuxième et le reste à un troisième. Le premier fournisseur produit 80 % de pneus sans défauts, le deuxième 95 % et le troisième 85 %.

- Le réparateur prend un pneu au hasard dans son stock. On note $D =$ « le pneu pris au hasard est défectueux » et pour $i \in \llbracket 1; 3 \rrbracket$: $F_i =$ « le pneu pris au hasard provient du fournisseur n° i ». Montrer que : $P(D) = 0,125$.
- Le pneu choisi est sans défaut. Quelle est la probabilité qu'il provienne du deuxième fournisseur ?
- On note X la variable aléatoire continue qui donne le nombre de kilomètres parcourus sans crevaisson par un pneu. On fait l'hypothèse que X suit une loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$. La probabilité que le pneu parcoure entre 500 et 1000 km sans crevaisson est égale à $\frac{1}{4}$. Que vaut λ ?

Exercice XXVI.13

Partie A :

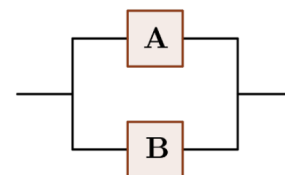
Deux composants A et B sont montés en série sur une machine.



La durée de vie, en jours, de chaque composant est une variable aléatoire qui suit la loi exponentielle de paramètre $\lambda = 0,0002$. La machine tombe en panne dès qu'un des composants cesse de fonctionner. Les durées de vie de A et B sont indépendantes. Déterminer la probabilité que la machine fonctionne encore après 100 jours.

Partie B :

Deux composants A et B sont montés en parallèles sur une machine.



La durée de vie, en jours, de chaque composant est une variable aléatoire qui suit la loi exponentielle de paramètre $\lambda = 0,0002$. La machine ne tombe en panne que si les deux composants cessent de fonctionner. Les durées de vie de A et B sont indépendantes. Déterminer la probabilité que la machine fonctionne encore après 100 jours.

Séquence XXVI – Probabilités continues

Loi normale

Exercice XXVI.14

Soit X une variable aléatoire suivant la loi normale centrée réduite.

1. $P(X = 1)$
2. $P(-2 \leq X \leq 1,5)$
3. $P(-3 \leq X \leq -0,5)$

Exercice XXVI.15

Soit X une variable aléatoire suivant la loi normale centrée réduite.

1. Calculer en arrondissant au millièmè :

- | | |
|----------------------|--------------------|
| (a) $P(X \leq 1,3)$ | (c) $P(X \geq 2)$ |
| (b) $P(X \geq -1,3)$ | (d) $P(X \geq -1)$ |

2. On note A l'événement $(X \leq 1,3)$ et B l'événement $(X \geq -1)$. Calculer $P_B(A)$.

Exercice XXVI.16

Soit X une variable aléatoire suivant la loi normale centrée réduite. Grâce à la calculatrice, déterminer les valeurs approchées arrondies au centièmè des réels a , b et c tels que :

1. $P(X \leq a) = 0,1256$
2. $P(X \geq b) = 0,247$
3. $P(0 \leq X \leq c) = 0,4988$

Exercice XXVI.17

Une variable aléatoire T suit la loi normale de moyenne 14 et d'écart-type σ . Quelle est la valeur de σ sachant que $P(T \leq 22) = 0,023$?

Exercice XXVI.18

Une cantine sert des repas en grand nombre. Soit X la variable aléatoire qui donne la masse, en grammes, des rations de viande. On suppose que X suit la loi normale $\mathcal{N}(120; 225)$. Les probabilités seront arrondies au millièmè.

1. Quelle est la masse moyenne d'une ration ?
2. Quelle est la probabilité que la masse d'une ration soit compris entre 105 g et 135 g ?
3. Le 10 avril, la cantine a servi 1 250 repas. À combien peut-on évaluer le nombre de rations dont la masse dépassait 130 g ?

Exercice XXVI.19

On commercialise de la farine en sachets. Considérons la variable aléatoire X qui, à chaque sachet tiré au hasard, associe sa masse en grammes. Celle-ci suit la loi normale $\mathcal{N}(1020; 625)$.

1. Quelle est, à 10^{-4} près, la probabilité qu'un sachet pèse plus de 1050 grammes ?
2. Déterminer, à l'unité près, l'entier k tel que : $P(X \leq k) = 0,05$. En déduire le poids du sachet tel que 5 % des sachets fabriqués soit plus légers que lui.
3. Quel est le poids du sachet tel que 10 % des sachets soient plus lourds que lui ?

Exercice XXVI.20

Soit X une variable aléatoire qui suit la loi normale $\mathcal{N}(\mu; \sigma^2)$, où $\sigma^2 = 4$.

On sait que $P(X \leq 106) = 0,802$.

1. Montrer que

$$P(X \leq 106) = P\left(\frac{X - \mu}{2} \leq \frac{106 - \mu}{2}\right) = 0,802$$

Quelle la loi de $\frac{X - \mu}{2}$?

2. En déduire la valeur arrondie de μ à l'entier le plus proche.

Exercice XXVI.21

Dans une usine d'emballage, un automate remplit des paquets de café de 250 grammes. On sait que l'automate verse en fait une quantité de café variable, régie par la loi normale de moyenne μ et d'écart-type égal à 3, μ étant une valeur réglable. Quelle doit être la valeur de μ pour que 90 % des clients achètent au moins 250 grammes de café ?

Séquence XXVI – Probabilités continues

Autres lois

relire cet exercice pour être sûr qu'il n'y a pas de faute

Exercice XXVI.22

On utilise les **lois de Poisson** pour modéliser des événements rares, par exemple les catastrophes aériennes.

Plus précisément, on les utilise dans des situations où la probabilité qu'un événement se réalise est très faible, et lorsqu'on effectue un grand nombre de répétitions au cours d'une certaine période.

Une loi de Poisson est caractérisée par un paramètre (avec λ réel strictement positif), qui est le nombre moyen d'événements sur la période de temps considérée.

1. On s'intéresse dans un premier temps aux accidents survenus avec des avions Tupolev 154, sur une période de deux ans.

X est la variable aléatoire qui compte le nombre de tels accidents.

On considère que le nombre de vols est constant pour chaque période de deux ans.

- (a) Entre 1985 et 2020, on a compté 9 accidents avec ce type d'avion. Calculer le nombre moyen N d'accidents par période de deux ans.
- (b) Pour modéliser ce phénomène, on utilise une loi de Poisson de paramètre $\lambda = 2N$. Pour tout entier naturel k , la probabilité que k accidents se produisent sur une période de deux ans est :

$$P(X = k) = \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}$$

Calculer la probabilité qu'exactement deux accidents se produisent.

- (c) Dans un tableau, donner les probabilités que k accidents se produisent, pour k allant de 0 à 9. On arrondira au millièème.
- (d) Calculer la probabilité que quatre accidents ou moins se produisent.
- (e) En déduire la probabilité que cinq accidents ou plus se produisent.

Suite de l'exercice XXVI.22

2. On s'intéresse maintenant aux accidents survenus avec des avions Airbus A320 en deux ans. On considère à nouveau que le nombre de vols par période de deux ans est constant.

- (a) On a compté six accidents sur une période de dix ans. En déduire la valeur du paramètre de la loi de Poisson que l'on peut alors utiliser.
- (b) Dans un tableau, donner les probabilités que k accidents se produisent, pour k allant de 0 à 6. On arrondira au centième.
- (c) Calculer la probabilité que cinq accidents de ce type ou plus se produisent sur une période de 2 ans.

Exercice XXVI.23

La **loi de Gumbel** est très utilisée en hydrologie et en climatologie pour estimer les valeurs extrêmes de phénomènes.

On note X la variable aléatoire égale à la température maximum observée durant un épisode de canicule.

La densité f de X est définie par :

$$f(x) = \frac{1}{8} e^{-\frac{x-30}{8}} e^{-e^{-\frac{x-30}{8}}}$$

où x est un nombre réel.

1. Vérifier que f est de la forme $u' \times e^u$, où u est une fonction à préciser.
2. Déterminer $\int_a^{30} f(x) dx$, avec a réel et $a < 30$.
3. En déduire $\lim_{a \rightarrow -\infty} \int_a^{30} f(x) dx$.

Séquence XXVI – Probabilités continues

Sujets de bac à compléter



Exercice XXVI.24

Une grande entreprise dispose d'un vaste réseau informatique. On observe la durée séparant deux pannes informatiques. Cette durée sera appelée « temps de fonctionnement ». Soit X la variable aléatoire égale au temps de fonctionnement, exprimée en heures. On admet que X suit une loi exponentielle de paramètre λ . On rappelle que, pour tout réel $t \geq 0$, $P(X \leq t) = \int_0^t \lambda e^{-\lambda x} dx$.

1. On sait que la probabilité que le temps de fonctionnement soit inférieur à 7 heures est égale à 0,6. Montrer qu'une valeur approchée de λ à 10^{-3} près est 0,131.

Dans les questions suivantes, on prendra 0,131 pour valeur approchée de λ et les résultats seront donnés à 10^{-2} près.

2. Montrer qu'une valeur approchée de la probabilité que le temps de fonctionnement soit supérieur à 5 heures est égale à 0,52.
3. Calculer la probabilité que le temps de fonctionnement soit supérieur à 9 heures sachant qu'il n'y a pas eu de panne au cours des quatre premières heures.
4. Calculer la probabilité que le temps de fonctionnement soit compris entre 6 et 10 heures.
5. On relève aléatoirement 8 temps de fonctionnement, qu'on suppose indépendants. Soit Y la variable aléatoire égale au nombre de relevés correspondant à des temps de fonctionnement supérieurs ou égaux à 5 heures.
 - (a) Quelle est la loi suivie par Y ?
 - (b) Calculer la probabilité que trois temps parmi ces huit soient supérieurs ou égaux à 5 heures.
 - (c) Calculer l'espérance mathématique de Y (on arrondira à l'entier le plus proche).

D'après un sujet de Bac S, Nouvelle-Calédonie, Novembre 2011

