

# Probabilités continues

## 1. Intégrales généralisées

Exemple :

On pose pour, tout  $t \geq 1$ ,  $I_t = \int_1^t \frac{1}{x} dx$ .

Calculer  $I_t$  puis calculer  $\lim_{t \rightarrow +\infty} I_t$ .

Interpréter graphiquement cette limite.

Exemple :

On pose, pour tout  $t \geq 1$ ,  $J_t = \int_1^t \frac{1}{x^2} dx$ .

Calculer  $J_t$  puis calculer  $\lim_{t \rightarrow +\infty} J_t$ .

Interpréter graphiquement cette limite.

### ■ DÉFINITION :

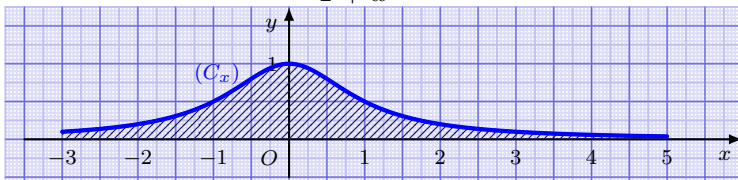
Soit  $a$  un réel quelconque. On considère une fonction  $f$  définie, continue et positive sur  $[a; +\infty[$ .

On pose pour tout  $t \geq a$  :  $I_t = \int_a^t f(x) dx$ .

Alors par définition :

$$\int_a^{+\infty} f(x) dx = \lim_{t \rightarrow +\infty} I_t$$

Remarque :  $\int_a^{+\infty} f(x) dx$  s'interprète graphiquement comme l'aire du domaine constitué des points de coordonnées  $(x; y)$  vérifiant :  $x \geq a$  et  $0 \leq y \leq f(x)$  (sur l'exemple,  $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$  et  $a = -3$ )



Exemple :

Calculer :  $\int_0^{+\infty} e^{-x} dx$ ,  $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2} dx$  et  $\int_2^{+\infty} \frac{1}{x} dx$ .

Remarque : Si la fonction  $f$  est définie, continue et positive sur  $] -\infty; b]$ , on pose également :

$$\int_{-\infty}^b f(x) dx = \lim_{t \rightarrow -\infty} \int_t^b f(x) dx$$

### ■ DÉFINITION :

Soit  $a$  un réel quelconque. On considère une fonction  $f$  définie, continue et positive sur  $\mathbb{R}$ .

On pose, pour tout  $t \in \mathbb{R}$ ,  $I_t = \int_a^t f(x) dx$ .

Si  $\lim_{t \rightarrow +\infty} I_t$  et  $\lim_{t \rightarrow -\infty} I_t$  sont deux nombres réels alors

on définit  $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx$  par :

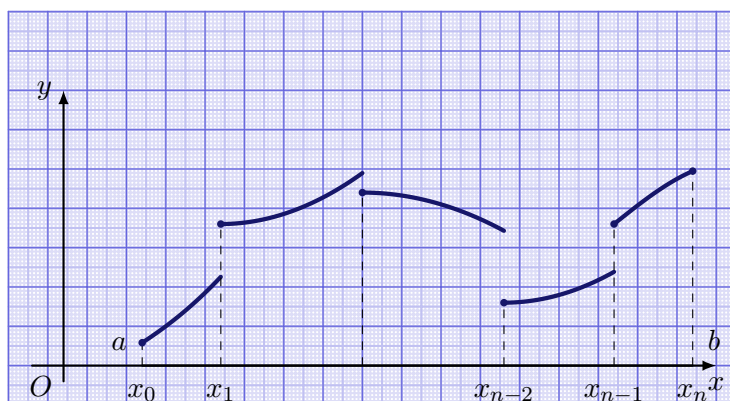
$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = \lim_{t \rightarrow +\infty} I_t - \lim_{t \rightarrow -\infty} I_t$$

Remarque : On vérifie aisément que la valeur de  $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx$  ne dépend pas du réel  $a$  choisi.

### ■ DÉFINITION :

Soit  $f$  une fonction définie sur un intervalle  $[a; b]$ . On dira que la fonction  $f$  est **continue par morceaux sur l'intervalle**  $[a; b]$  s'il existe une subdivision :  $a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_{n-1} < x_n = b$  telle que, pour tout  $i \in \llbracket 0; n-1 \rrbracket$ , la restriction de la fonction  $f$  à l'intervalle  $]x_i; x_{i+1}[$  soit continue et admette une limite finie en  $x_i$  et en  $x_{i+1}$ .

**Remarque :** On dira que la fonction  $f$  est continue par morceaux sur  $\mathbb{R}$  si elle l'est sur tout segment inclus dans  $\mathbb{R}$ .



### ■ DÉFINITION :

Soit  $f$  une fonction continue par morceaux sur l'intervalle  $[a; b]$ . On définit alors :  $\int_a^b f(x) dx$  par

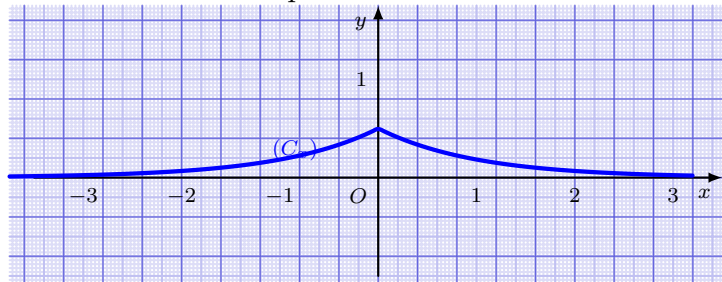
$$\int_a^b f(x) dx = \int_{x_0}^{x_1} f(x) dx + \int_{x_1}^{x_2} f(x) dx + \cdots + \int_{x_{n-1}}^{x_n} f(x) dx$$

#### Exemple : (1)

On considère la fonction  $f$  définie sur  $\mathbb{R}$  par :

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}e^x & \text{si } x < 0 \\ \frac{1}{2}e^{-x} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

Cette fonction est représentée ci-dessous :



Calculer :  $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx$ .

#### Exemple : (2)

On considère la fonction  $f$  définie sur  $\mathbb{R}$  par

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} & \text{si } 1 \leq x \leq 3 \\ 0 & \text{si } x < 1 \text{ ou } x > 3 \end{cases}$$

Grâce à une interprétation graphique, calculer :  $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx$

#### Exemple : (3)

On suppose que la fonction  $f$  est positive, continue par morceaux et que  $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = 1$ .

Si  $\int_{-\infty}^a f(x) dx = \frac{1}{3}$  alors que vaut  $\int_a^{+\infty} f(x) dx$  ?

#### Exemple : (4)

La fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ e^{-x} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

est continue par morceaux sur  $\mathbb{R}$ .

Calculer :  $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx$ .

## 2. Loïs de probabilité à densité

Jusqu'ici, les variables aléatoires étudiées prenaient des valeurs discrètes (c'est-à-dire **dénombrables**) :  $1, 2, \dots, n, \dots$ . Désormais, on va considérer des variables aléatoires pouvant *a priori* prendre toutes les valeurs d'un intervalle. Par exemple, si on appelle  $X$  la durée de vie d'un appareil, en supposant qu'on peut mesurer le temps avec une précision infinie,  $X$  peut prendre *a priori* toutes les valeurs de  $[0; +\infty[$ .

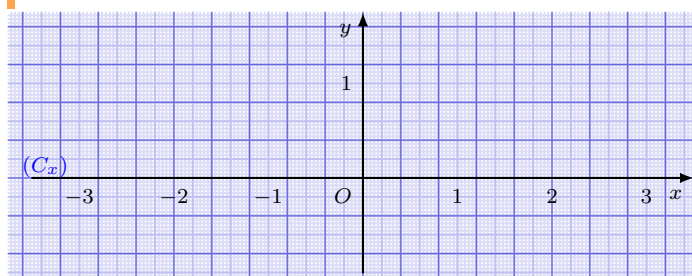
### ■ DÉFINITION :

Une fonction  $f$  continue par morceaux sur  $\mathbb{R}$  est appelée **densité de probabilité** si  $f$  est positive sur  $\mathbb{R}$  et  $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = 1$ .

#### Exemples :

La fonction de l'exemple 1 est-elle une densité de probabilité ?

Même question pour la fonction de l'exemple 2 et de l'exemple 4.



### ■ DÉFINITION :

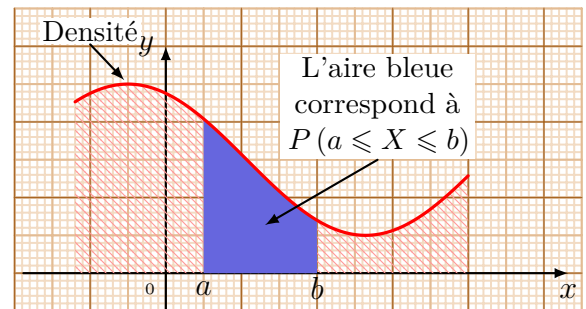
Soit  $X$  une variable aléatoire et  $f$  une densité de probabilité.

On dit que  $X$  **suit la loi de probabilité de densité**  $f$  si, pour tous  $a$  et  $b$  dans  $\mathbb{R}$  :

$$P(a \leq X \leq b) = \int_a^b f(x) dx$$

$$P(X \leq b) = \int_{-\infty}^b f(x) dx$$

$$P(a \leq X) = \int_a^{+\infty} f(x) dx$$

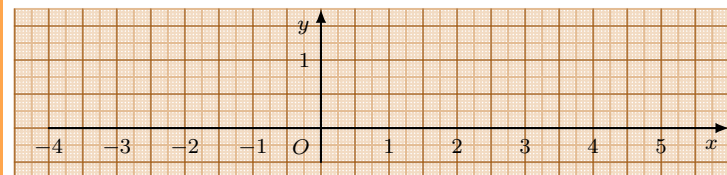


#### Exemple :

La fonction  $f$  définie sur  $\mathbb{R}$  par

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} & \text{si } 1 \leq x \leq 3 \\ 0 & \text{si } x < 1 \text{ ou } x > 3 \end{cases}$$

est une densité de probabilité. Elle est représentée ci-dessous.



On considère une variable aléatoire  $X$  suivant la loi de densité  $f$ .

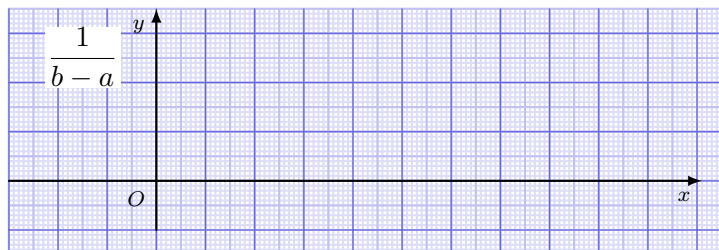
Au moyen de considérations graphiques, donner les valeurs des probabilités suivantes :  $P(4 \leq X \leq 7)$ ,  $P(1 \leq X \leq 3)$ ,  $P(1 \leq X \leq 2)$ ,  $P(-2 \leq X \leq 2)$ ,  $P(X > 0)$ ,  $P(X = 2)$ ,  $P(X < 2)$

### 3. La loi uniforme sur $[a; b]$

#### ■ DÉFINITION :

La **loi uniforme** sur l'intervalle  $[a; b]$  a pour densité la fonction  $f$  définie sur  $\mathbb{R}$  par :

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & \text{si } a \leq x \leq b \\ 0 & \text{si } x < a \text{ ou } x > b \end{cases}$$



**Remarque :** La constante  $\frac{1}{b-a}$  a été judicieusement choisi pour que  $f$  soit une densité de probabilité.

**Notation :** On note  $X \hookrightarrow \mathcal{U}([a; b])$ .

#### Exemple :

À Chicago, Milton arrive tous les jours à l'école entre 8 h 00 et 8 h 30. On définit la variable aléatoire  $X$  comme l'heure d'arrivée (exprimée en heures) de Milton à l'école. On suppose que  $X$  suit la loi uniforme sur l'intervalle  $[8; 8,5]$ .

Représenter la densité de probabilité de la loi uniforme sur l'intervalle  $[8; 8,5]$ .

Calculer la probabilité que Milton arrive entre 8 h 15 et 8 h 20 à l'école.

Calculer la probabilité que Milton arrive avant 8 h 15 ou après 8 h 20.

#### ■ DÉFINITION :

Soit  $f$  une densité de probabilité et  $X$  une variable aléatoire suivant la loi de densité de probabilité  $f$ . Sous réserve d'existence, l'**espérance** de la variable aléatoire  $X$  est le réel  $E(X)$  défini par :

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x \times f(x) dx$$

Sous réserve d'existence, la **variance** de la variable aléatoire  $X$  est le réel  $V(X)$  défini par :

$$V(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - E(X))^2 f(x) dx$$

#### ■ THÉORÈME : de König-Huyghens

Sous réserve d'existence

$$\begin{aligned} V(X) &= \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x) dx - [E(X)]^2 \\ &= E(X^2) - [E(X)]^2 \end{aligned}$$

#### ■ PROPRIÉTÉ :

Si la variable aléatoire  $X$  suit la loi uniforme sur  $[a; b]$  alors l'espérance de  $X$  est  $E(X) = \frac{a+b}{2}$ .

#### Exemple :

Calculer  $E(X)$  pour l'application précédente. Comment s'interprète ce résultat ?

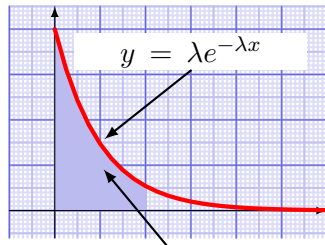
## 4. La loi exponentielle

### ■ DÉFINITION :

Soit  $\lambda$  un réel strictement positif.

La **loi exponentielle de paramètre  $\lambda$**  est la loi de densité la fonction  $f$  définie sur  $\mathbb{R}$  par :

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ \lambda e^{-\lambda x} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$



L'aire bleue correspond  
à

**Remarque :** Posons pour tout  $t \geq 0$  :

$$F(t) = \int_0^t \lambda e^{-\lambda x} dx \text{ ce qui montre que la fonction } f$$

est bien une densité de probabilité.

**Notation :** On note  $X \hookrightarrow \mathcal{E}(\lambda)$ .

### ■ PROPRIÉTÉ :

Si la variable aléatoire  $X$  suit la loi exponentielle de paramètre  $\lambda > 0$  alors elle admet une espérance, qui est :  $E(X) = \frac{1}{\lambda}$ .

#### Exemple :

Une étude statistique a montré que la durée de vie  $X$  exprimée en années d'un disque dur est une variable aléatoire suivant une loi exponentielle et que la durée de vie moyenne d'un disque dur est de 5 ans.

1. Déterminer le paramètre  $\lambda$  de la loi exponentielle suivie par la variable  $X$ .
2. Un disque dur est garanti 2 ans. Calculer à  $10^{-3}$  près la proportion de disques dur qui sera retournée au fournisseur pour cause de panne.
3. Calculer  $P(X \geq 3)$  et interpréter le résultat.

**Remarque :** Soient  $t$  et  $h$  deux réels positifs. On a :

$$\begin{aligned} P(X \geq t + h) &= 1 - P(0 \leq X < t + h) \\ &= 1 - \int_0^{t+h} \lambda e^{-\lambda x} dx \\ &= 1 - [1 - e^{-\lambda(t+h)}] \\ &= e^{-\lambda(t+h)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Ainsi } P_{X \geq t}(X \geq t + h) &= \frac{P(X \geq t + h \cap X \geq t)}{P(X \geq t)} \\ &= \frac{P(X \geq t + h)}{P(X \geq t)} \\ &= \frac{e^{-\lambda(t+h)}}{e^{-\lambda t}} \\ &= e^{-\lambda h} \\ &= P(X \geq h) \end{aligned}$$

Ainsi, si  $X$  désigne une durée de vie, par exemple d'un composant électronique, l'égalité

$$P_{X \geq t}(X \geq t + h) = P(X \geq h)$$

signifie que : sachant que la durée de vie est supérieure à  $t$ , la probabilité qu'elle soit supérieure à  $t + h$ , donc que la vie du composant dure encore un temps  $h$  supplémentaire, ne dépend pas de  $t$ , mais seulement de  $h$  : c'est pour cela que la loi exponentielle est également appelée **loi de durée de vie sans vieillissement** (ou **sans mémoire**). Si la durée de vie d'un humain suivait une telle loi, un humain âgé de 95 ans, aurait une probabilité de vivre jusqu'à 100 ans qui serait la même que celle qu'un humain vive plus de 5 ans après sa naissance : la durée de vie d'un humain n'est clairement pas gouvernée par une loi de durée de vie sans vieillissement !

### Exemple :

On reprend l'exemple précédent. Sachant qu'un disque dur n'est plus sous garantie, quelle est la probabilité que sa durée de vie dépasse 5 ans ?

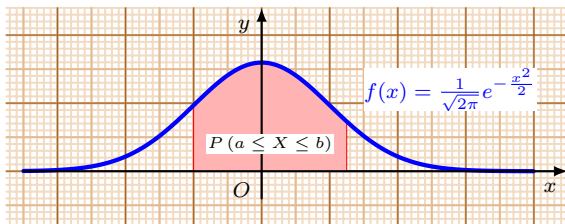
## 5. La loi normale

### A. La loi normale centrée réduite

#### ■ DÉFINITION :

La loi normale centrée réduite est la loi de densité la fonction  $f$  définie pour tout  $x \in \mathbb{R}$  par

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$$



Notation : On note  $X \hookrightarrow \mathcal{N}(0; 1)$ .

#### Remarque :

- La courbe représentative de la fonction  $f$  est appelée **courbe de Gauss** ou **courbe en cloche**.
- Pour tout réel  $x$  :

$$f(-x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(-x)^2}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} = f(x)$$

Ainsi, la fonction  $f$  est paire et donc sa courbe représentative dans un repère orthogonal admet l'axe des ordonnées comme axe de symétrie.

Ainsi, si  $X \hookrightarrow \mathcal{N}(0; 1)$  que

$$\begin{aligned} P(X \geq 0) &= P(X \leq 0) \\ &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

- La fonction  $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$  est continue sur  $\mathbb{R}$  : elle admet donc une primitive sur  $\mathbb{R}$ . Mais on démontre qu'il n'est pas possible d'exprimer ses primitives comme combinaison de fonctions élémentaires. Par conséquent, les calculs de probabilité avec la loi normale centrée réduite se font exclusivement à l'aide de la calculatrice en choisissant  $\mu = 0$  et  $\sigma = 1$ .

### Exemples :

Premiers calculs. On suppose que  $X \hookrightarrow \mathcal{N}(0; 1)$ . À l'aide de la calculatrice, calculer :  $P(-1 \leq X \leq 1)$ ,  $P(X \leq -3)$ ,  $P(X > 5)$

### Exemple :

On lance 18 000 fois un dé non pipé.  $X$  est la variable aléatoire qui compte le nombre de 6 apparus pendant ces 18 000 lancers.

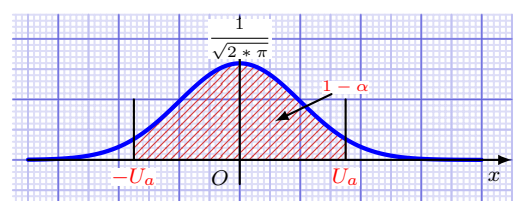
- Quelle est la loi de la variable aléatoire  $X$  ? Calculer son espérance  $\mu$  et son écart-type  $\sigma$ .
- On considère que la variable aléatoire  $Z$  définie par  $Z = \frac{X - \mu}{\sigma}$  suit la loi  $\mathcal{N}(0; 1)$ . Montrer que :  $P(2850 \leq X \leq 3150) = P(-3 \leq Z \leq 3)$  puis donner la valeur arrondie au millièmme de cette probabilité.

### ■ PROPRIÉTÉ :

Si  $X \hookrightarrow \mathcal{N}(0; 1)$  alors  $E(X) = 0$  et  $\sigma(X) = 1$ .

### ■ PROPRIÉTÉ :

Soit  $X$  une variable aléatoire suivant la loi  $\mathcal{N}(0; 1)$ .  $\forall \alpha \in ]0; 1[, \exists ! u_\alpha > 0, P(-u_\alpha \leq X \leq u_\alpha) = 1 - \alpha$



En pratique, comment trouver une valeur approchée de  $u_\alpha$  ?

Les calculatrices donnent pour tout réel  $p > 0$  (correspondant à une aire), l'unique réel  $x$  tel que  $P(X \leq x) = p$ .

Ensuite, par raison de symétrie :

$$P(-u_\alpha \leq X \leq u_\alpha) = 2P(0 \leq X \leq u_\alpha)$$

Or :  $P(X \leq u_\alpha) = \frac{1}{2} + P(0 \leq X \leq u_\alpha)$  et donc

$$2P(0 \leq X \leq u_\alpha) = 2P(X \leq u_\alpha) - 1$$

Ainsi

$$\begin{aligned} P(-u_\alpha \leq X \leq u_\alpha) &= 1 - \alpha \\ \Leftrightarrow 2P(X \leq u_\alpha) - 1 &= 1 - \alpha \\ \Leftrightarrow P(X \leq u_\alpha) &= 1 - \frac{\alpha}{2} \end{aligned}$$

La formule  $P(X \leq u_\alpha) = 1 - \frac{\alpha}{2}$  est à retrouver plutôt qu'à apprendre par cœur.

#### Exemples :

Calculer  $u_{0,05}$  et  $u_{0,01}$ .

### ■ DÉFINITION :

Soit  $\mu \in \mathbb{R}$  et  $\sigma \in \mathbb{R}_+^*$ .

On dit que la variable aléatoire  $X$  **suit la loi normale de paramètres  $\mu$  et  $\sigma^2$**  si la variable

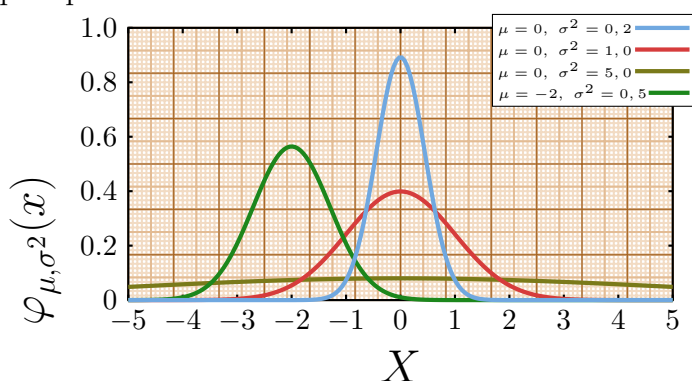
$Z = \frac{X - \mu}{\sigma}$  suit la loi  $\mathcal{N}(0; 1)$ . On note alors :

$X \hookrightarrow \mathcal{N}(\mu; \sigma^2)$ .

Si  $X \hookrightarrow \mathcal{N}(\mu; \sigma^2)$  alors  $E(X) = \mu$  et  $\sigma(X) = \sigma$ .

**Remarque :** La courbe représentative de la densité associée à  $\mathcal{N}(\mu; \sigma^2)$  a aussi la forme d'une courbe en cloche, avec un axe de symétrie qui est la droite d'équation  $x = \mu$ .

Plus  $\sigma$  est petit, moins la variable  $X$  suivant  $\mathcal{N}(\mu; \sigma^2)$  est dispersée, ce qui se voit avec une courbe en cloche plus pointue.



#### Exemples :

On suppose que  $X \hookrightarrow \mathcal{N}(113; 25)$ .

Calculer  $P(110 \leq X \leq 120)$  de deux manières : d'une part en utilisant la définition ci-dessus puis la calculatrice ; d'autre part, directement avec la calculatrice.

#### Exemple :

Une machine utilise un robot pour remplir des boîtes de pâtée pour chien. Du fait de l'imperfection des mécanismes, la masse  $X$  de pâtée par boîte, exprimée en grammes, varie en suivant la loi normale de moyenne 201 et d'écart-type 1,5.

Calculer la probabilité que la masse de pâtée dans une boîte prise au hasard soit comprise entre 199g et 203g.

### ■ PROPRIÉTÉ :

Si  $X \hookrightarrow \mathcal{N}(\mu; \sigma^2)$  alors :

- $P(X \in [\mu - \sigma; \mu + \sigma]) \approx 0,680$
- $P(X \in [\mu - 2\sigma; \mu + 2\sigma]) \approx 0,954$
- $P(X \in [\mu - 3\sigma; \mu + 3\sigma]) \approx 0,997$

#### Exemple :

Si  $X \hookrightarrow \mathcal{N}(10; 3^2)$  alors plus de 95 % des valeurs prises par  $X$  sont dans l'intervalle

## 6. Le théorème de Moivre-Laplace

Notons tout d'abord que si la variable aléatoire  $X$  suit la loi  $\mathcal{B}(n; p)$  alors la variable aléatoire définie par  $Y = \frac{X - np}{\sqrt{np(1-p)}}$  est telle que  $E(Y) = 0$  (elle est

centrée)

et  $\sigma(Y) = 1$  (elle est réduite) :

### ■ DÉFINITION :

De manière générale, si  $X$  est une variable aléatoire, on appelle **variable aléatoire centrée réduite associée à  $X$**  la variable aléatoire  $\frac{X - E(X)}{\sigma(X)}$

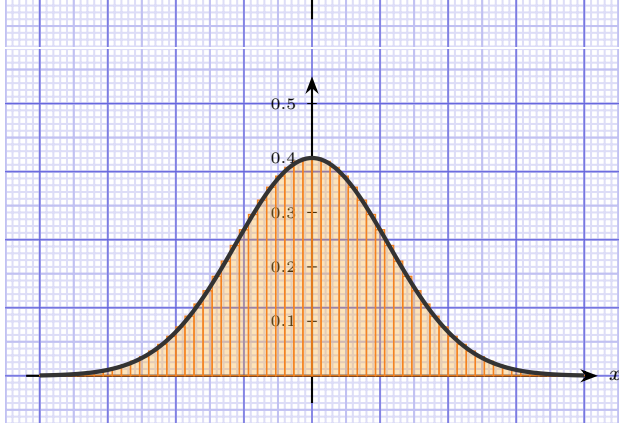
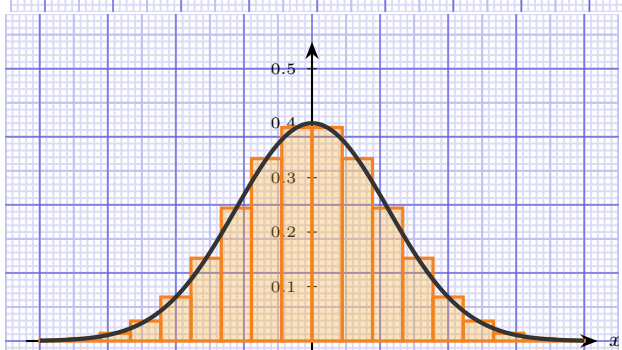
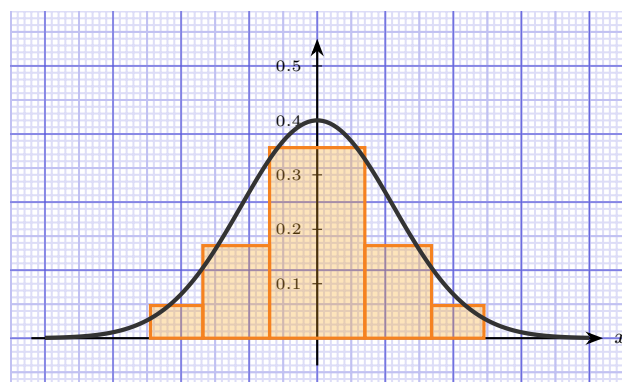
Les valeurs prises par  $X$  sont  $k = 0; 1; \dots; n$  et

$$P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

Les valeurs prises par  $Y$  sont

$$y = \frac{0 - np}{\sqrt{np(1-p)}}; \frac{1 - np}{\sqrt{np(1-p)}}; \dots; \frac{n - np}{\sqrt{np(1-p)}}$$

avec  $P(Y = y) = P(X = k)$  où  $y = \frac{k - np}{\sqrt{np(1-p)}}$ .



On observe que la partie supérieure de l'histogramme, formant la représentation graphique d'une fonction en escalier, se rapproche de la courbe de la fonction  $f$ . Nous admettrons le théorème suivant :

### ■ THÉORÈME : Moivre<sup>1</sup>-Laplace<sup>2</sup>

Si  $X_n \hookrightarrow \mathcal{B}(n; p)$  alors pour tout intervalle  $[a; b]$  :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P\left(a \leq \frac{X_n - np}{\sqrt{np(1-p)}} \leq b\right) = P(a \leq Z \leq b)$$

où  $Z \hookrightarrow \mathcal{N}(0; 1)$

En pratique, on admet que :

Lorsque les conditions :  $\begin{cases} n \geq 30 \\ np \geq 5 \\ n(1-p) \geq 5 \end{cases}$  sont

vérifiées, on pourra remplacer

$$P\left(a \leq \frac{X_n - np}{\sqrt{np(1-p)}} \leq b\right) \text{ par } P(a \leq Z \leq b)$$

où  $Z \hookrightarrow \mathcal{N}(0; 1)$ .

### Exemple :

On joue 10 000 fois de suite à Pile ou Face avec une pièce parfaite et on appelle  $X$  le nombre de Piles apparus. On veut calculer  $P(X \in [4900; 5100])$ . La situation est celle d'un schéma de Bernoulli donc

$$X \hookrightarrow \mathcal{B}\left(10\,000; \frac{1}{2}\right)$$

Donc

$$\begin{aligned} P(X \in [4900; 5100]) &= \sum_{k=4900}^{5100} \binom{10000}{k} \left(\frac{1}{2}\right)^k \left(\frac{1}{2}\right)^{10000-k} \\ &= \left(\frac{1}{2}\right)^{10000} \sum_{k=4900}^{5100} \binom{10000}{k} \end{aligned}$$

On se convainc très rapidement que ce calcul est impossible avec une calculatrice.

Or, comme  $\begin{cases} n = 10000 \geq 30 \\ np = 5000 \geq 5 \\ n(1-p) = 5000 \geq 5 \end{cases}$ , nous sommes

en situation d'application du théorème de Moivre-Laplace. On a  $E(X) = np = 5000$

et  $\sigma(X) = \sqrt{np(1-p)} = \sqrt{2500} = 50$ . D'où :

1. Abraham de Moivre, (1667, Vitry-le-François – 1754, Londres) est un mathématicien français.

2. Pierre-Simon de Laplace est un mathématicien que nous avons déjà rencontré... dans le premier chapitre sur les probabilités !

$$\begin{aligned}
& P(X \in [4900; 5100]) \\
&= P\left(\frac{4900 - 5000}{50} \leq \frac{X - 5000}{50} \leq \frac{5100 - 5000}{50}\right) \\
&= P(-2 \leq \frac{X - 5000}{50} \leq 2) \\
&\approx P(-2 \leq Z \leq 2)
\end{aligned}$$

où  $Z \hookrightarrow \mathcal{N}(0; 1)$ . Or,  $P(-2 \leq Z \leq 2) \approx 0,954$  donc :  $P(X \in [4900; 5100]) \approx 0,954$ .

#### Exemple :

Une compagnie de taxis possède 100 véhicules. On considère que chacun des taxis a une probabilité de 0,1 de tomber en panne chaque mois. Soit  $X$  le nombre de véhicules en panne chaque mois dans cette compagnie.

1. Quelle est la loi de  $X$  ? À l'aide de l'instruction binomFRép de la calculatrice, calculer :

$$P(0 \leq X \leq 5)$$

2. En utilisant le théorème de Moivre-Laplace, donner une valeur approchée de

$$P(0 \leq X \leq 5)$$

#### Exemple :

Nicolas joue régulièrement au football avec des amis. Il est un peu maladroit : au moment de passer le ballon à un de ses coéquipiers, il lui arrive assez souvent de l'envoyer directement en touche. La probabilité qu'une passe de Nicolas soit ainsi ratée est  $p = 0,2$ . On suppose qu'au cours d'un match, Nicolas tente 36 passes.

On note  $X$  le nombre de passes ratées par Nicolas pendant ce match.

1. Quelle est la probabilité que Nicolas ne rate aucune passe pendant le match ?
2. Quelle est la probabilité qu'il en rate plus de 10 ?
3. Pourquoi peut-on considérer que la loi de la variable  $\frac{X - 7,2}{2,4}$  est proche de la loi  $\mathcal{N}(0; 1)$  ?
4. Lors d'un match important, ses amis avertissent Nicolas qu'à la 5ème touche ratée, il sera remplacé par un autre joueur. En utilisant l'approximation justifiée à la question c, calculer la probabilité que Nicolas finisse le match.
5. Nicolas considère que cette probabilité est trop faible et décide de s'entraîner avant le match pour diminuer sa probabilité  $p$  de rater une passe. Quelle valeur de  $p$  doit-il atteindre pour que la probabilité qu'il finisse le match soit supérieure à 90 % ?