

Exercice 2 : (9 points / 40)

Partie A

Soit a_1, a_2 et a_3 trois nombres entiers relatifs. L'objectif de cette partie est de résoudre le système de

congruences suivant :

$$\begin{cases} x \equiv a_1 \pmod{3} \\ x \equiv a_2 \pmod{7} \\ x \equiv a_3 \pmod{11} \end{cases} \quad \text{où l'inconnue } x \text{ est un nombre entier relatif.}$$

On notera (S) ce système et on pose : $m = 3 \times 7 \times 11 = 231$; $m_1 = 7 \times 11 = 77$; $m_2 = 3 \times 11 = 33$; $m_3 = 3 \times 7 = 21$.

1. Existence d'une solution particulière x_0

- a. À l'aide du théorème de Bézout, démontrer qu'il existe un nombre entier x_1 tel que : $77x_1 \equiv 1 \pmod{3}$.
Donner une valeur possible de x_1 .

On admet qu'il existe également deux entiers x_2 et x_3 tels que $33x_2 \equiv 1 \pmod{7}$ et $21x_3 \equiv 1 \pmod{11}$.

On pose ensuite $x_0 = m_1x_1a_1 + m_2x_2a_2 + m_3x_3a_3$.

- b. Démontrer que x_0 est une solution du système (S).

2. Forme générale des solutions

Dans cette question, on va montrer que l'ensemble des solutions du système (S) est l'ensemble des nombres entiers x qui s'écrivent sous la forme $x = x_0 + km$

(où k est un entier relatif et x_0 la solution particulière obtenue dans la question 1.).

- a. Soit k un entier relatif. On pose $x = x_0 + km$.
Démontrer que x est une solution du système (S).
- b. Réciproquement. Soit x une solution du système (S).
- Démontrer que $x - x_0$ est divisible par 3, par 7 et par 11.
 - Démontrer, à l'aide du théorème de Gauss, que $x - x_0$ est divisible par 231.
 - En déduire que le nombre x s'écrit sous la forme annoncée.

Partie B

Voici un problème tiré de documents datant du 2^{ème} siècle, retrouvés en Chine :

*Un général chinois fait ranger son armée en lignes.
Si chaque rangée compte trois soldats, il reste un soldat seul.
Si chaque rangée compte sept soldats, il reste trois soldats seuls.
Si chaque rangée compte onze soldats, il reste cinq soldats seuls.
De combien de soldats dispose le général ?*

- Montrer que ce problème peut se traduire par un système de congruences similaire à celui de la partie A.
- En utilisant la partie A, calculer une solution particulière x_0 du problème puis donner l'ensemble des solutions.
- Le général a versé leur salaire à au moins 1000 soldats. Calculer le nombre minimal de soldats dont dispose le général.