

Exercice 26

On se propose de montrer, grâce à un contre-exemple, que la réciproque du corollaire du théorème de Fermat est fausse.

1. Décomposer 561 en produit de facteurs premiers.
2. Démontrer que, si x est un entier alors, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $a^n - 1$ est un multiple de $a - 1$
3. Démontrer que $a^{561} - a$ est divisible par 3 puis par 11, puis par 17.
4. En déduire que, pour tout entier naturel a , $a^{561} - a \equiv 0 [561]$
5. Conclure.

Solution de l'exercice 26

1.

$$\begin{aligned} 561 &= 3 \times 187 \\ &= 3 \times 11 \times 17 \end{aligned}$$

2. $x^n - 1 = (x - 1)(x^{n-1} + x^{n-2} + \dots + 1)$

Si x est un entier alors $x^{n-1} + x^{n-2} + \dots + 1$ est un entier et $x - 1$ est un entier.

Conséquence : $(x^n - 1)$ est un multiple de $(x - 1)$

3. On sait que $a^{561} - a = a(a^{560} - 1)$

On considère la décomposition de 560 en produit de facteurs premiers

$$560 = 2^4 \times 5 \times 7$$

560 a donc $5 \times 2 \times 2 = 20$ diviseurs de 560

$$D_{560} =$$

$\{1; 2; 4; 5; 7; 8; 10; 14; 16; 20; 28; 35; 40; 56; 70; 80; 140; 280; 560\}$

• $560 = 2 \times 280$

$$a^{560} = (a^2)^{280}$$

On pose $x = a^2$ et $n = 280$

$a^{560} - 1$ est un multiple de $a^2 - 1$. Donc il existe

$$K \in \mathbb{N} \text{ tel que : } a^{560} - 1 = (a^2 - 1)K$$

Par suite,

$$a^{561} - a = a(a^{560} - 1)$$

$$a^{561} - a = a(a^2 - 1)K$$

$$a^{561} - a = (a^3 - a)K$$

Or $a^3 - a$ est divisible par 3

Donc, $a^{561} - a$ est divisible par 3

• $560 = 10 \times 56$

$$a^{560} = (a^{10})^{56}$$

On pose $x = a^{10}$ et $n = 56$

$a^{560} - 1$ est un multiple de $a^{10} - 1$. Donc il existe

$$K' \in \mathbb{N} \text{ tel que : } a^{560} - 1 = (a^{10} - 1)K'$$

Par suite,

$$a^{561} - a = a(a^{560} - 1)$$

$$a^{561} - a = a(a^{10} - 1)K'$$

$$a^{561} - a = (a^{11} - a)K'$$

Or $a^{11} - a$ est divisible par 11. Donc, $a^{561} - a$ est divisible par 11

• $560 = 16 \times 35$

$$a^{560} = (a^{16})^{35}$$

On pose $x = a^{16}$ et $n = 35$

$a^{560} - 1$ est un multiple de $a^{16} - 1$. Donc il existe

$$K'' \in \mathbb{N} \text{ tel que : } a^{560} - 1 = (a^{16} - 1)K''$$

Par suite,

$$a^{561} - a = a(a^{560} - 1)$$

$$a^{561} - a = a(a^{16} - 1)K''$$

$$a^{561} - a = (a^{17} - a)K''$$

Or $a^{17} - a$ est divisible par 17

Donc, $a^{561} - a$ est divisible par 17

4. Les nombres 3, 11 et 17 sont trois nombres premiers donc premiers entre eux 2 à 2.

$a^{561} - a$ est divisible par 3, 11 et 17.

Donc $a^{561} - a$ est divisible par $3 \times 11 \times 17 = 561$

Par suite :

$$a^{561} - a \equiv 0 [561]$$

$$a^{561} \equiv a [561]$$

et pourtant 561 n'est pas un nombre premier.

Donc la réciproque du corollaire du théorème de Fermat n'est pas vraie.

Exercice 28

On cherche à déterminer tous les entiers relatifs N tels que :

$$\begin{cases} N \equiv 5 [13] \\ N \equiv 1 [17] \end{cases}$$

1. Vérifier que 239 est solution de ce système.
2. Soit N un entier relatif solution de ce système. Démontrer que N peut s'écrire sous la forme $N = 1 + 17x = 5 + 13y$ où x et y sont deux entiers relatifs vérifiant la relation

$$17x - 13y = 4$$

3. Résoudre l'équation $17x - 13y = 4$ où x et y sont des entiers relatifs.
4. En déduire qu'il existe un entier relatif k tel que $N = 18 + 221k$.
5. Démontrer que

$$N \equiv 18 [221] \iff \begin{cases} N \equiv 5 [13] \\ N \equiv 1 [17] \end{cases}$$

Remarque : Cette dernière équivalence est basée sur un théorème appelé **Théorème chinois des restes**. Voir l'article de Philippe Julien sur le sujet.

Solution de l'exercice 28

1. $239 = 18 \times 13 + 5$ donc $239 \equiv 5 [13]$
 $239 = 14 \times 17 + 1$ donc $239 \equiv 1 [17]$
Donc 239 est solution du système.
2. N est un entier relatif solution du système donc :
 $N \equiv 1 [17]$. Il existe $x \in \mathbb{Z}$ tel que $N = 1 + 17x$
 $N \equiv 5 [13]$. Il existe $y \in \mathbb{Z}$ tel que $N = 5 + 13y$
3. $17x - 13y = 4$
Le couple $(1; 1)$ est une solution particulière de l'équation car :

$$17 \times 1 - 13 \times 1 = 17 - 13 = 4$$

$$17x - 13y = 4 \iff 17x - 13y = 4 = 17 \times 1 - 13 \times 1 \\ \iff 17(x - 1) = 13 \times (y - 1)$$

$$17 \text{ divise } 13(y - 1)$$

$$\text{pgcd}(17; 13) = 1$$

D'après le théorème de Gauss, 17 divise $(y - 1)$

Donc il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $y - 1 = 17k$

Pour tout $k \in \mathbb{Z}$ si $y - 1 = 17k$, alors :

$$17(x - 1) = 13(y - 1) \iff 17(x - 1) = 13 \times 17k \\ \iff x - 1 = 13k$$

Conclusion :

Pour tout $k \in \mathbb{Z}$, $y - 1 = 17k$ et $x - 1 = 13k$

$$\begin{cases} x = 13k + 1 \\ y = 17k + 1 \end{cases} \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$S = \{(13k + 1; 17k + 1); k \in \mathbb{Z}\}$$

$$4. N = 1 + 17x = 5 + 13y$$

$$17x - 13y = 4$$

D'où,

$$\begin{aligned} N &= 1 + 17x \\ &= 1 + 17(13k + 1) \\ &= 1 + 221k + 17 \\ &= 18 + 221k \end{aligned}$$

ou

$$\begin{aligned} N &= 5 + 13y \\ &= 5 + 13(17k + 1) \\ &= 5 + 221k + 13 \\ &= 18 + 221k \end{aligned}$$

5. Si $\begin{cases} N \equiv 5 [13] \\ N \equiv 1 [17] \end{cases}$ alors d'après les questions précédentes, il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $N = 18 + 221k$, c'est à dire $N \equiv 18 [221]$

Réciproquement, si $N \equiv 18 [221]$ alors il existe $K \in \mathbb{Z}$ tel que $N = 18 + 221K$

$$N = 18 + 221K$$

$$N = 18 + 13 \times 17K$$

$$\text{Donc : } N \equiv 18 [13]$$

$$\text{Comme } 18 \equiv 5 [13]$$

$$\text{On a donc : } N \equiv 5 [13]$$

De même :

$$N = 18 + 221K$$

$$N = 18 + 13 \times 17K$$

$$\text{Donc : } N \equiv 18 [17]$$

$$\text{Comme } 18 \equiv 1 [17]$$

$$\text{On a donc : } N \equiv 1 [17]$$

Par conséquent, N est solution du système

$$\begin{cases} N \equiv 5 [13] \\ N \equiv 1 [17] \end{cases}$$