

Nouvelle Calédonie mars 2016. Enseignement spécifique

EXERCICE 2 (3 points) (commun à tous les candidats)

On considère les fonctions f et g définies sur l'intervalle $[0 ; 16]$ par

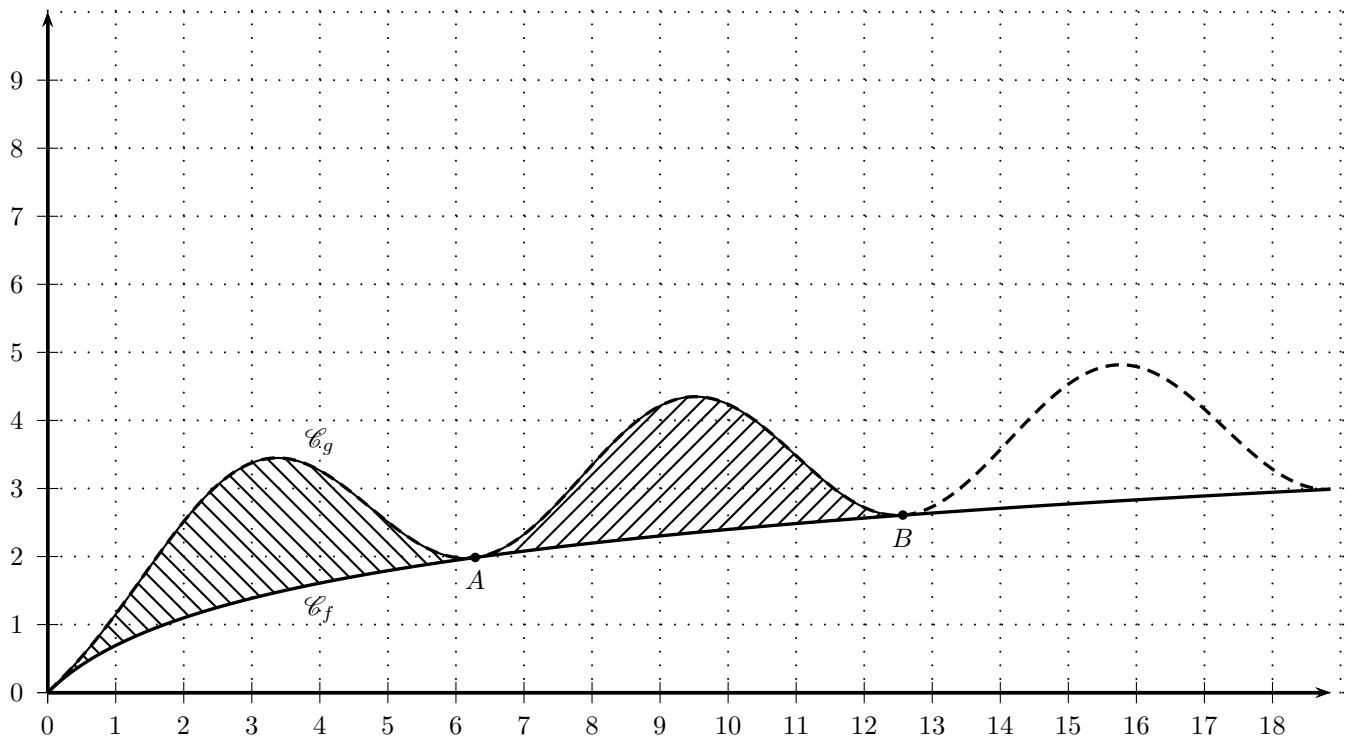
$$f(x) = \ln(x+1) \quad \text{et} \quad g(x) = \ln(x+1) + 1 - \cos(x).$$

Dans un repère du plan $(O, \vec{i}, \vec{j})$, on note $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$ les courbes représentatives des fonctions f et g .

Ces courbes sont données en **annexe 1**.

Comparer les aires des deux surfaces hachurées sur ce graphique.

ANNEXE 1 de l'exercice 2



À RENDRE AVEC LA COPIE

EXERCICE 2 : corrigé

• Déterminons tout d'abord les abscisses des points A et B . On sait que les abscisses des points d'intersection des courbes $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$ sont les solutions de l'équation $f(x) = g(x)$.

Soit $x \in [0, 16]$.

$$f(x) = g(x) \Leftrightarrow \ln(1+x) = \ln(1+x) + 1 - \cos x \Leftrightarrow \cos x = 1 \Leftrightarrow \text{il existe } k \in \mathbb{Z} \text{ tel que } x = 2k\pi.$$

De plus, $0 < 2k\pi \leq 16 \Leftrightarrow 0 < k \leq \frac{8}{\pi} \Leftrightarrow k = 1 \text{ ou } k = 2$. L'abscisse du point A est 2π et l'abscisse du point B est 4π .

• Pour tout réel x de $[0, 16]$, $g(x) - f(x) = 1 - \cos x \geq 0$ et donc $\mathcal{C}_g$ est au-dessus de $\mathcal{C}_f$ sur $[0, 16]$. L'aire, exprimée en unités d'aire, de la surface hachurée la plus à gauche est

$$\mathcal{A}_1 = \int_0^{2\pi} (g(x) - f(x)) \, dx = \int_0^{2\pi} (1 - \cos x) \, dx = [x - \sin x]_0^{2\pi} = (2\pi - \sin(2\pi)) - (0 - \sin(0)) = 2\pi.$$

L'aire, exprimée en unités d'aire, de la surface hachurée la plus à droite est

$$\mathcal{A}_2 = \int_{2\pi}^{4\pi} (g(x) - f(x)) \, dx = \int_{2\pi}^{4\pi} (1 - \cos x) \, dx = [x - \sin x]_{2\pi}^{4\pi} = (4\pi - \sin(4\pi)) - (2\pi - \sin(2\pi)) = 2\pi.$$

Les deux aires sont égales.