

France métropolitaine/Réunion. Septembre 2017. Enseignement spécifique

EXERCICE 1 (6 points) (commun à tous les candidats)

Partie A

On considère la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n par :

$$u_n = \int_0^n e^{-x^2} dx.$$

On ne cherchera pas à calculer u_n en fonction de n .

1) a) Montrer que la suite (u_n) est croissante.

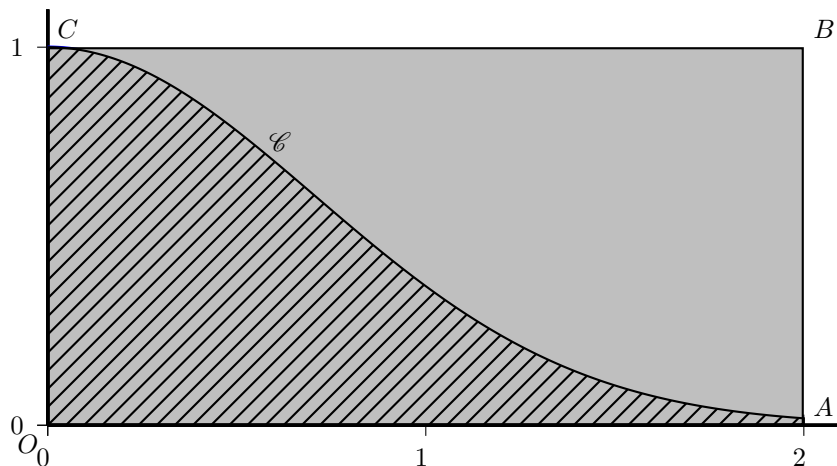
b) Démontrer que pour tout réel $x \geq 0$, on a : $-x^2 \leq -2x + 1$, puis : $e^{-x^2} \leq e^{-2x+1}$.
En déduire que pour tout entier naturel n , on a : $u_n < \frac{e}{2}$.

c) Démontrer que la suite (u_n) est convergente. On ne cherchera pas à calculer sa limite.

2) Dans cette question, on se propose d'obtenir une valeur approchée de u_2 .

Dans le repère orthonormé $(O ; \vec{i}, \vec{j})$ ci-dessous, on a tracé la courbe $\mathcal{C}_f$ représentative de la fonction f définie sur l'intervalle $[0 ; 2]$ par $f(x) = e^{-x^2}$, et le rectangle $OABC$ où $A(2 ; 0)$, $B(2 ; 1)$ et $C(0 ; 1)$.

On a hachuré le domaine $\mathcal{D}$ compris entre la courbe $\mathcal{C}_f$, l'axe des abscisses, l'axe des ordonnées et la droite d'équation $x = 2$.



On considère l'expérience aléatoire consistant à choisir un point M au hasard à l'intérieur du rectangle $OABC$.

On admet que la probabilité p que ce point appartienne au domaine est : $p = \frac{\text{aire de } \mathcal{D}}{\text{aire de } OABC}$.

a) Justifier que $u_2 = 2p$.

b) On considère l'algorithme suivant :

L1	Variables : N, C nombres entiers ; X, Y, F nombres réels
L2	Entrée : Saisir N
L3	Initialisation : C prend la valeur 0
L4	Traitement :
L5	Pour k variant de 1 à N
L6	X prend la valeur d'un nombre aléatoire entre 0 et 2
L7	Y prend la valeur d'un nombre aléatoire entre 0 et 1
L8	Si $Y \leq e^{-X^2}$ alors
L9	C prend la valeur $C + 1$
L10	Fin si
L11	Fin pour
L12	Afficher C
L13	F prend la valeur C/N
L14	Afficher F

i) Que permet de tester la condition de la ligne L8 concernant la position du point $M(X ; Y)$?

ii) Interpréter la valeur F affichée par cet algorithme.

iii) Que peut-on conjecturer sur la valeur de F lorsque N devient très grand ?

c) En faisant fonctionner cet algorithme pour $N = 10^6$, on obtient $C = 441\,138$.

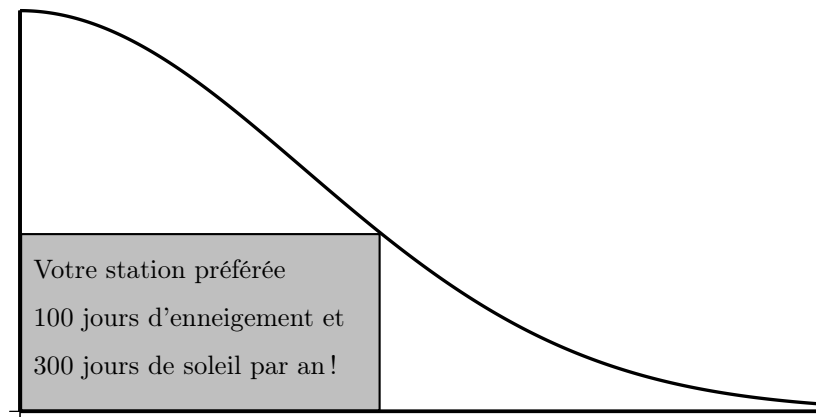
On admet dans ce cas que la valeur F affichée par l'algorithme est une valeur approchée de la probabilité p à 10^{-3} près.

En déduire une valeur approchée de u_2 à 10^{-2} près.

Partie B

Une entreprise spécialisée est chargée par l'office de tourisme d'une station de ski de la conception d'un panneau publicitaire ayant la forme d'une piste de ski.

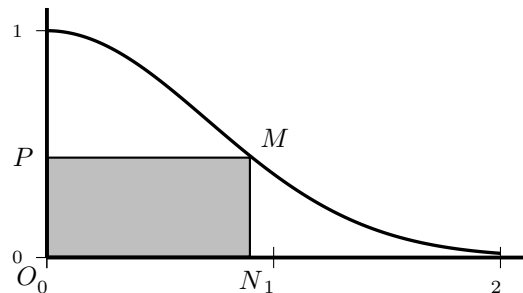
Afin de donner des informations sur la station, une zone rectangulaire est insérée sur le panneau comme indiqué sur la figure ci-dessous.



Le panneau, modélisé par le domaine $\mathcal{D}$ défini dans la partie A, est découpé dans une plaque rectangulaire de 2 mètres sur 1 mètre. Il est représenté ci-dessous dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$; l'unité choisie est le mètre.

Pour x nombre réel appartenant à l'intervalle $[0; 2]$, on note :

- M le point de la courbe $\mathcal{C}_f$ de coordonnées $(x; e^{-x^2})$,
- N le point de coordonnées $(x; 0)$,
- P le point de coordonnées $(0; e^{-x^2})$,
- $A(x)$ l'aire du rectangle $ONMP$.



- 1) Justifier que pour tout nombre réel x de l'intervalle $[0; 2]$, on a : $A(x) = xe^{-x^2}$.
- 2) Déterminer la position du point M sur la courbe $\mathcal{C}_f$ pour laquelle l'aire du rectangle $ONMP$ est maximale.
- 3) Le rectangle $ONMP$ d'aire maximale obtenu à la question 2. doit être peint en bleu, et le reste du panneau en blanc. Déterminer, en m^2 et à 10^{-2} près, la mesure de la surface à peindre en bleu et celle de la surface à peindre en blanc.

EXERCICE 1 : corrigé

Partie A

1) a) Soit n un entier naturel. D'après la relation de CHASLES

$$u_{n+1} - u_n = \int_0^{n+1} e^{-x^2} dx - \int_0^n e^{-x^2} dx = \int_n^{n+1} e^{-x^2} dx = \int_n^{n+1} e^{-x^2} dx.$$

Pour tout réel x de $[n, n+1]$, $e^{-x^2} \geq 0$. Par positivité de l'intégrale, on en déduit que $\int_n^{n+1} e^{-x^2} dx \geq 0$.

On a montré que pour tout entier naturel n , $u_{n+1} - u_n \geq 0$ et donc la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante.

b) Soit x un réel. $x^2 - 2x + 1 = (x-1)^2$ et donc $0 \leq x^2 - 2x + 1$ puis $-x^2 \leq -2x + 1$. Par croissance de la fonction exponentielle sur $\mathbb{R}$, on en déduit que $e^{-x^2} \leq e^{-2x+1}$.

Soit n un entier naturel. Pour tout réel x de $[0, n]$, on a $e^{-x^2} \leq e^{-2x+1}$. Par croissance de l'intégrale, on en déduit que $\int_0^n e^{-x^2} dx \leq \int_0^n e^{-2x+1} dx$. Ensuite,

$$\int_0^n e^{-2x+1} dx = \left[-\frac{1}{2} e^{-2x+1} \right]_0^n = \left(-\frac{1}{2} e^{-2n+1} \right) - \left(-\frac{1}{2} e^{0+1} \right) = \frac{e}{2} - \frac{e^{-2n+1}}{2}.$$

Puisque $\frac{e^{-2n+1}}{2} > 0$, on en déduit que $\int_0^n e^{-x^2} dx \leq \int_0^n e^{-2x+1} dx < \frac{e}{2}$ et finalement, $u_n < \frac{e}{2}$.

On a montré que pour tout entier naturel n , $u_n < \frac{e}{2}$.

c) La suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante d'après a), et majorée (par $\frac{e}{2}$) d'après b). On en déduit que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge.

2) a) La fonction $x \mapsto e^{-x^2}$ est positive sur $[0, 2]$. Donc, u_2 est l'aire, exprimée en unités d'aire, du domaine $\mathcal{D}$. L'aire, exprimée en unités d'aire, de $OABC$ est égale à $OA \times OC$ c'est-à-dire 2. Donc,

$$u_2 = \text{aire de } \mathcal{D} = p \times \text{aire de } OABC = 2p.$$

b) i) La condition de la ligne L8 est vérifiée si et seulement si le point $M(X, Y)$ appartient au domaine $\mathcal{D}$.

b) ii) L'algorithme génère N points aléatoires de coordonnées (X, Y) à l'intérieur du rectangle $OABC$. Le compteur C dénombre parmi ces N points ceux qui sont dans le domaine $\mathcal{D}$. $F = \frac{C}{N}$ est donc la fréquence d'appartenance d'un point au domaine $\mathcal{D}$.

b) iii) Quand N est très grand, la fréquence F obtenue expérimentalement est proche de la probabilité théorique p .

c) La fréquence est $F = \frac{441\,138}{1\,000\,000} = 0,441\,138$. Donc, $0,440\,138 \leq p \leq 0,442\,138$ puis

$$0,880\,276 \leq 2p \leq 0,884\,276$$

et en particulier, $0,88 \leq 2p \leq 0,89$. Puisque $u_2 = 2p$, une valeur approchée par défaut de u_2 à 10^{-2} près est 0,88.

Partie B

1) Soit x un réel de $[0, 2]$. $A(x) = ON \times OP = xe^{-x^2}$.

2) La fonction A est dérivable sur $[0, 2]$ et pour $x \in [0, 2]$,

$$A'(x) = 1 \times e^{-x^2} + x \times (-2x)e^{-x^2} = (1 - 2x^2) e^{-x^2} = (1 - x\sqrt{2}) (1 + x\sqrt{2}) e^{-x^2}.$$

Pour tout réel x de $[0, 2]$, $(1 + x\sqrt{2}) e^{-x^2} > 0$ et donc $A'(x)$ est du signe de $1 - x\sqrt{2}$. En tenant compte du fait que $0 < \frac{1}{\sqrt{2}} < 2$, on en déduit que la fonction A' est strictement positive sur $\left[0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right]$, strictement négative sur $\left[\frac{1}{\sqrt{2}}, 2\right]$ et s'annule en $\frac{1}{\sqrt{2}}$. On en déduit encore que la fonction A est strictement croissante sur $\left[0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right]$ et strictement décroissante sur $\left[\frac{1}{\sqrt{2}}, 2\right]$. Finalement, la fonction A admet un maximum en $\frac{1}{\sqrt{2}}$ et ce maximum est

$$f\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}} e^{-\frac{1}{2}}.$$

Le point M de $\mathcal{C}_f$ pour lequel l'aire du rectangle $ONMP$ est maximale est le point de $\mathcal{C}_f$ d'abscisse $\frac{1}{\sqrt{2}}$.

3) L'unité d'aire est 1m^2 . L'aire à peindre en bleu est l'aire maximale de $ONMP$ c'est-à-dire $\frac{1}{\sqrt{2}}e^{-\frac{1}{2}}$. L'aire à peindre en blanc est $u_2 - \frac{1}{\sqrt{2}}e^{-\frac{1}{2}}$.

La calculatrice fournit $0,428 \leq \frac{1}{\sqrt{2}}e^{-\frac{1}{2}} \leq 0,429$ et donc une valeur approchée à 10^{-2} près de l'aire à peindre en bleu est $0,42\text{ m}^2$. D'autre part, $0,880 \leq u_2 \leq 0,885$ et donc

$$0,880 - 0,429 \leq u_2 - \frac{1}{\sqrt{2}}e^{-\frac{1}{2}} \leq 0,885 - 0,428$$

ou encore $0,451 \leq u_2 - \frac{1}{\sqrt{2}}e^{-\frac{1}{2}} \leq 0,457$. Une valeur approchée à 10^{-2} près de l'aire à peindre en bleu est $0,45\text{ m}^2$.