

Asie 2017. Enseignement spécifique

EXERCICE 4 (3 points) (commun à tous les candidats)

L'objet du problème est l'étude des intégrales I et J définies par :

$$I = \int_0^1 \frac{1}{1+x} dx \quad \text{et} \quad J = \int_0^1 \frac{1}{1+x^2} dx.$$

Partie A : valeur exacte de l'intégrale I

- 1) Donner une interprétation géométrique de l'intégrale I .
- 2) Calculer la valeur exacte de I .

Partie B : estimation de la valeur J

Soit g la fonction définie sur l'intervalle $[0; 1]$ par $g(x) = \frac{1}{1+x^2}$.

On note $\mathcal{C}_g$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé du plan.

On a donc : $J = \int_0^1 g(x) dx$.

Le but de cette partie est d'évaluer l'intégrale J à l'aide de la méthode probabiliste décrite ci-après.

On choisit au hasard un point $M(x; y)$ en tirant de façon indépendante ses coordonnées x et y au hasard selon la loi uniforme sur $[0; 1]$.

On admet que la probabilité p qu'un point tiré de cette manière soit situé sous la courbe $\mathcal{C}_g$ est égale à l'intégrale J .

En pratique, on initialise un compteur c à 0, on fixe un entier naturel n et on répète n fois le processus suivant :

- on choisit au hasard et indépendamment deux nombres x et y , selon la loi uniforme sur $[0; 1]$;
- si $M(x; y)$ est au-dessous de la courbe $\mathcal{C}_g$ on incrémente le compteur c de 1.

On admet que $f = \frac{c}{n}$ est une valeur approchée de J . C'est le principe de la méthode dite de Monte-Carlo.

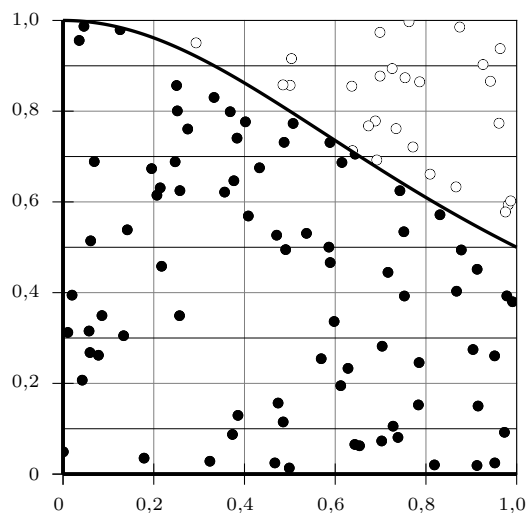
Illustration de la méthode avec $n = 100$

La figure ci-contre illustre la méthode présentée pour $n = 100$.

100 points ont été placés aléatoirement dans le carré.

Les disques noirs correspondent aux points sous la courbe, les disques blancs aux points au-dessus de la courbe.

Le rapport du nombre de disques noirs par le nombre total de disques donne une estimation de l'aire sous la courbe.



- 1) Recopier et compléter l'algorithme ci-après pour qu'il affiche une valeur approchée de J .

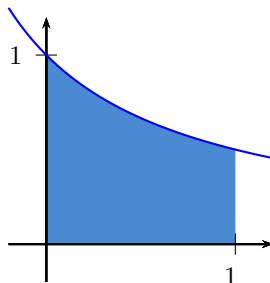
Variables	n, c, f, i, x, y sont des nombres
Traitement	Lire la valeur de n c prend la valeur ... Pour i allant de 1 à ... faire x prend une valeur aléatoire entre 0 et 1 y prend ... Si ... alors ... prend la valeur ... Fin si Fin pour f prend la valeur ...
Sortie	Afficher f

- 2) Pour $n = 1\,000$, l'algorithme ci-dessus a donné pour résultat : $f = 0,781$.
Donner un intervalle de confiance, au niveau de confiance de 95 %, de la valeur exacte de J .
- 3) Quelle doit-être, au minimum, la valeur de n pour que l'intervalle de confiance, au niveau de confiance de 95 %, ait une amplitude inférieure ou égale à 0,02 ?

EXERCICE 4 : corrigé

Partie A : valeur exacte de l'intégrale I

1) La fonction $x \mapsto \frac{1}{1+x}$ est continue et positive sur $[0, 1]$. Donc, I est l'aire, exprimée en unités d'aire, du domaine du plan compris entre l'axe des abscisses et la courbe représentative de la fonction $x \mapsto \frac{1}{1+x}$ d'une part, et les droites d'équations respectives $x = 0$ et $x = 1$ d'autre part.



2) $I = \int_0^1 \frac{1}{1+x} dx = [\ln(1+x)]_0^1 = \ln(2) - \ln(1) = \ln(2).$

Partie B : estimation de la valeur de J

1) Algorithme complété.

Variables	n, c, f, i, x, y sont des nombres
Traitement	Lire la valeur de n c prend la valeur 0 Pour i allant de 1 à n faire x prend une valeur aléatoire entre 0 et 1 y prend une valeur aléatoire entre 0 et 1 Si $y \leq 1/(1+x^2)$ alors c prend la valeur $c+1$ Fin si Fin pour f prend la valeur c/n
Sortie	Afficher f

2) Un intervalle de confiance au niveau de confiance de 95% de la valeur exacte de J est

$$\left[f - \frac{1}{\sqrt{n}}, f + \frac{1}{\sqrt{n}} \right] = \left[0,781 - \frac{1}{\sqrt{1000}}, 0,781 + \frac{1}{\sqrt{1000}} \right] = [0,749; 0,813]$$

en arrondissant de manière à élargir un peu l'intervalle.

3) L'amplitude de l'intervalle est $\frac{2}{\sqrt{n}}$.

$$\frac{2}{\sqrt{n}} \leq 0,02 \Leftrightarrow \frac{2}{0,02} \leq \sqrt{n} \Leftrightarrow 100 \leq \sqrt{n} \Leftrightarrow n \geq 10\,000.$$

La valeur minimum de n pour que l'amplitude de l'intervalle de confiance soit inférieure ou égale à 0,02 est 10 000.