Centres étrangers 2015. Enseignement spécifique

EXERCICE 4 (5 points) (candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité)

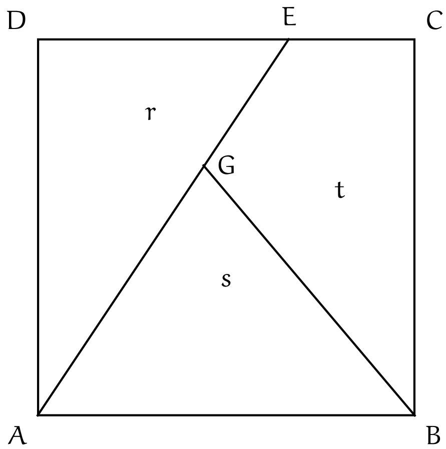
Les parties A et B sont indépendantes

Le fabricant de cadenas de la marque « K » désire imprimer un logo pour son entreprise.
Ce logo a la forme d'une lettre majuscule K stylisée, inscrite dans un carré $ABCD$, de côté une unité de longueur, et respectant les conditions C1 et C2 suivantes :

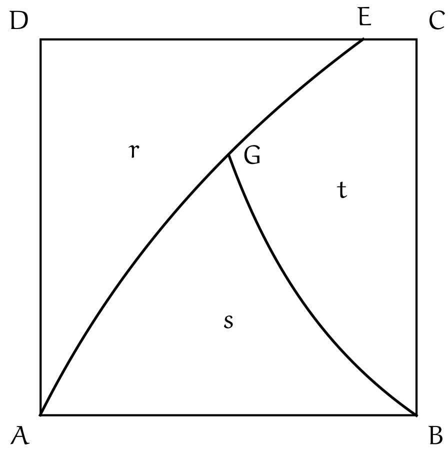
• Condition C1 : la lettre K doit être constituée de trois lignes :
- une des lignes est le segment $[AD]$;
- une deuxième ligne a pour extrémités le point A et un point E du segment $[DC]$;
- la troisième ligne a pour extrémité le point B et un point G situé sur la deuxième ligne.

• Condition C2 : l'aire de chacune des trois surfaces délimitées par les trois lignes dessinées dans le carré doit être comprise entre $0,3$ et $0,4$, l'unité d'aire étant celle du carré. Ces aires sont notées r, s, t sur les figures ci-après.

Un atelier de design propose deux dessins possibles, représentés ci-dessous :



Proposition A



Proposition B

Pour mener les études qui suivent, on se place dans le repère orthonormé $\left(A; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}\right)$.

Partie A. Etude de la proposition A

Dans cette proposition les trois lignes sont des segments et les trois aires sont égales : $r = s = t = \dfrac{1}{3}$.
Déterminer les coordonnées des points E et G.

Partie B. Etude de la proposition B

Cette proposition est caractérisée par les deux modalités suivantes :
• la ligne d'extrémités A et E est une portion de la représentation graphique de la fonction f définie pour tout réel $x \geqslant 0$ par : $f(x) = \ln(2x + 1)$;
• la ligne d'extrémités B et G est une portion de la représentation graphique de la fonction g définie pour tout réel $x > 0$ par : $g(x) = k\left(\dfrac{1-x}{x}\right)$, où k est un réel positif qui sera déterminé.

1) a) Déterminer l'abscisse du point E.

b) Déterminer la valeur du réel k, sachant que l'abscisse du point G est égale à $0,5$.

2) a) Démontrer que la fonction f admet pour primitive la fonction F définie pour tout réel $x \geqslant 0$ par :

$$F(x) = (x + 0,5) \times \ln(2x + 1) - x.$$

b) Démontrer que $r = \dfrac{e}{2} - 1$.

3) Déterminer une primitive G de la fonction g sur l'intervalle $]0, +\infty[$.

4) On admet que les résultats précédents permettent d'établir que $s = [\ln(2)]^2 + \dfrac{\ln(2) - 1}{2}$.
La proposition B remplit-elle les conditions imposées par le fabricant ?

Centres étrangers 2015. Enseignement spécifique

EXERCICE 4 : corrigé

Partie A

$y_E = y_D = 1$. D'autre part, l'aire du triangle ADE est $\dfrac{1 \times DE}{2} = \dfrac{x_E}{2}$. Puisque cette aire est aussi r, on en déduit que $x_E = 2r = \dfrac{2}{3}$.

$$\boxed{\text{Les coordonnées du point } E \text{ dans le repère } \left(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}\right) \text{ sont } \left(\frac{2}{3}, 1\right).}$$

De même, l'aire du triangle ABG est $\dfrac{1 \times y_G}{2} = \dfrac{y_G}{2}$. Puisque cette aire est aussi s, on en déduit que $y_G = 2s = \dfrac{2}{3}$.
D'autre part, le point G appartient à la droite (AE). Donc, les vecteurs $\overrightarrow{AE}$ et $\overrightarrow{AG}$ sont colinéaires. Les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AE}$ sont $\left(\dfrac{2}{3}, 1\right)$ et les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AG}$ sont $\left(x_G, \dfrac{2}{3}\right)$. On a donc $\begin{vmatrix} x_G & \dfrac{2}{3} \\ \dfrac{2}{3} & 1 \end{vmatrix} = 0$ ou encore $x_G - \dfrac{4}{9} = 0$ ou enfin $x_G = \dfrac{4}{9}$.

$$\boxed{\text{Les coordonnées du point } G \text{ dans le repère } \left(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}\right) \text{ sont } \left(\frac{4}{9}, \frac{2}{3}\right).}$$

Partie B

1) a) $f(x_E) = y_E = 1$ puis

$$f(x_E) = 1 \Leftrightarrow \ln(2x_E + 1) = 1 \Leftrightarrow 2x_E + 1 = e \Leftrightarrow x_E = \frac{e-1}{2}.$$

$$\boxed{\text{Les coordonnées du point } E \text{ dans le repère } \left(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}\right) \text{ sont } \left(\frac{e-1}{2}, 1\right).}$$

b) $x_G = 0,5$ puis $y_G = k\left(\dfrac{1-0,5}{0,5}\right) = k$. Les coordonnées du point G dans le repère $\left(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}\right)$ sont donc $(0,5; k)$.
D'autre part, le point G appartient à la courbe représentative de f et donc

$$k = y_G = f(x_5) = \ln(2 \times 0,5 + 1) = \ln(2).$$

2) a) La fonction F est dérivable sur $[0, +\infty[$ et pour $x \geqslant 0$,

$$F'(x) = 1 \times \ln(2x+1) + (x + 0,5) \times \frac{2}{2x+1} - 1 = \ln(2x+1) + \frac{2x+1}{2x+1} - 1 = \ln(2x+1) = f(x).$$

Donc la fonction F est une primitive de la fonction f sur $[0, +\infty[$.
b) r est l'aire, exprimée en unités d'aire, de la partie du plan comprise entre la courbe représentative de f et la droite d'équation $x = 1$ d'une part, les droites d'équations respectives $x = 0$ et $x = \dfrac{e-1}{2}$ d'autre part. Donc,

$$\begin{aligned} r &= \int_0^{(e-1)/2} (1 - f(x))\, dx = [x - F(x)]_0^{(e-1)/2} = \left[2x - \left(x + \frac{1}{2}\right)\ln(2x+1)\right]_0^{(e-1)/2} \\ &= e - 1 - \left(\frac{e-1}{2} + \frac{1}{2}\right)\ln\left(2\frac{e-1}{2} + 1\right) - 0 = e - 1 - \frac{e}{2}\ln(e) = e - 1 - \frac{e}{2} \\ &= \frac{e}{2} - 1. \end{aligned}$$

=

$$\boxed{r = \frac{e}{2} - 1.}$$

3) Pour tout réel $x > 0$, $g(x) = \ln(2)\left(\frac{1}{x} - 1\right)$. Une primitive de la fonction g sur $]0, +\infty[$ est la fonction $G : x \mapsto \ln(2)(\ln(x) - x)$.

4) La calculatrice donne $r = 0,35\ldots$ Donc $0,3 \leqslant r \leqslant 0,4$. Ensuite, $s = 0,32\ldots$ Donc, $0,3 \leqslant s \leqslant 0,4$.
Enfin, $t = 1 - r - s = 0,3\ldots$ Donc $0,3 \leqslant t \leqslant 0,4$.

$\boxed{\text{La proposition B remplit les conditions imposées par le fabriquant.}}$

