

Exercice 1 :

Partie A

1. a. $\lim_{x \rightarrow -\infty} h(x) = 0$ car $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{1}{1+e^{-x}} - \ln(1+e^x) \right] = -\infty.$$

b. La fonction h est dérivable sur $\mathbb{R}$ car somme du quotient de deux fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ et de la composée $x \mapsto \ln(1+e^x)$ où $\exp$ est dérivable sur $\mathbb{R}$.

Pour tout réel x : $h'(x) = \frac{-e^{2x}}{(1+e^x)^2}$ donc $h' < 0$ et h est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$. On obtient :

x	$-\infty$	$+\infty$
$h'(x)$	—	
$h(x)$	0	$-\infty$

Le tableau montre que pour tout réel x : $h(x) < 0$.

2. a. $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = \lim_{X \rightarrow 0} \frac{\ln(1+X)}{X} = 1$ d'après le cours.

b. $\frac{x}{e^x} + \frac{\ln(1+e^{-x})}{e^x} = \frac{x}{e^x} + \frac{\ln(\frac{e^x+1}{e^x})}{e^x} = \frac{x + \ln(e^x+1) - x}{e^x} = g(x)$

d'où $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{x}{e^x} + \frac{\ln(1+e^{-x})}{e^x} \right] = 0$ car $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{e^x} = 0$ d'après le cours.

c. La fonction g est dérivable sur $\mathbb{R}$ car produit de deux fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$, dont la composée $x \mapsto \ln(1+e^x)$ où $\exp$ est dérivable sur $\mathbb{R}$.

Pour tout réel x : $g'(x) = -e^{-x} \ln(1+e^x) + e^{-x} \times \frac{e^x}{1+e^x} = e^{-x} h(x)$, qui est donc du signe de $h(x)$ et donc strictement négative d'après la question 1. On en déduit :

d.

x	$-\infty$	$+\infty$
$g'(x)$	—	
$g(x)$	1	0

3. a. $I(\lambda) = \int_0^\lambda e^{-x} \ln(1+e^x) dx$

$$= [-e^{-x} \ln(1+e^x)]_0^\lambda + \int_0^\lambda e^{-x} \frac{e^x}{1+e^x} dx = [-e^{-x} \ln(1+e^x)]_0^\lambda + \int_0^\lambda \frac{1}{1+e^x} dx.$$

Or, avec l'indication : $\int_0^\lambda \frac{1}{1+e^x} dx = \int_0^\lambda \frac{e^{-x}}{1+e^{-x}} dx = [-\ln(1+e^{-x})]_0^\lambda$, d'où finalement :

$$I(\lambda) = [-e^{-x} \ln(1+e^x) - \ln(1+e^{-x})]_0^\lambda = -e^{-\lambda} \ln(1+e^\lambda) - \ln(1+e^{-\lambda}) + 2 \ln 2.$$

b. $\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} I(\lambda) = 2 \ln 2$ ce qui montre que l'aire du domaine délimité par (C_g) , l'axe des abscisses et la droite d'équation $x = 0$ est finie et égale à $2 \ln 2$.

Partie B

1. D'après le cours, les solutions de l'équation $(E_1) : y' + y = 0$ sont les fonctions $x \mapsto Ae^{-x}$ où $A \in \mathbb{R}$.
2. On a pour tout réel $x : g'(x) + g(x) = -e^{-x} \ln(1 + e^x) + \frac{1}{1+e^x} + e^{-x} \ln(1 + e^x) = \frac{1}{1+e^x}$, ce qui montre que la fonction g est une solution de l'équation (E) .
3. $(f - g)$ est solution de (E_1)
$$\Leftrightarrow (f - g)' + (f - g) = 0 \Leftrightarrow f' - g' + f - g = 0 \Leftrightarrow f' - f = g' - g.$$
Or d'après 2, g est solution de (E) donc $g' - g = \frac{1}{1+e^x}$ d'où :
$$(f - g) \text{ est solution de } (E_1) \Leftrightarrow f' - f = \frac{1}{1+e^x} \Leftrightarrow f \text{ est solution de } (E).$$
4. Ainsi : f est solution de $(E) \Leftrightarrow (f - g) = Ae^{-x}$ où $A \in \mathbb{R}$
$$\Leftrightarrow f(x) = g(x) + Ae^{-x} = e^{-x} \ln(1 + e^x) + Ae^{-x}.$$