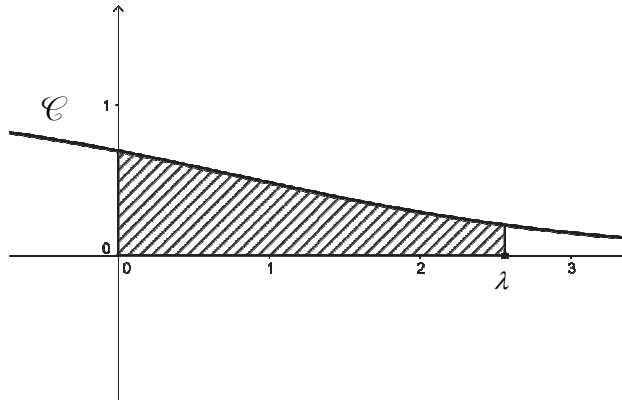


Exercice 1 : 12 points

Partie A : Un domaine de longueur infinie dont l'aire est finie

L'objectif de cette partie est de déterminer la limite, lorsque λ tend vers $+\infty$, de l'aire du domaine hachuré ci-dessous, où λ est un nombre réel strictement positif et la courbe $\mathcal{C}$ est celle d'une fonction à étudier.



1. On considère la fonction h définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = \frac{e^x}{1+e^x} - \ln(1+e^x)$.
 - a. Déterminer $\lim_{x \rightarrow -\infty} h(x)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x)$.
 - b. Etudier les variations de la fonction h . Dresser son tableau de variation.
En déduire, pour tout $x \in \mathbb{R}$, le signe de $h(x)$.
2. Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = e^{-x} \ln(1+e^x)$, représentée par la courbe $\mathcal{C}$ ci-dessus.
 - a. En posant $X = e^x$, calculer $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x)$.
 - b. Vérifier que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $g(x) = \frac{x}{e^x} + \frac{\ln(1+e^{-x})}{e^x}$, puis déterminer $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$.
 - c. Justifier la dérivabilité de la fonction g sur $\mathbb{R}$ puis montrer que, pour tout nombre réel x , on a $g'(x) = e^{-x} h(x)$.
 - d. Etudier les variations de la fonction g . Dresser son tableau de variation.
3. À tout réel $\lambda > 0$, on associe le réel $I(\lambda)$ défini par $I(\lambda) = \int_0^\lambda g(x) dx$.
 - a. À l'aide d'une intégration par parties et en remarquant que, pour tout nombre réel x , on a $\frac{1}{1+e^x} = \frac{e^{-x}}{1+e^{-x}}$, montrer que $I(\lambda) = -e^{-\lambda} \ln(1+e^\lambda) - \ln(1+e^{-\lambda}) + 2\ln(2)$.
 - b. Calculer $\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} I(\lambda)$ et interpréter graphiquement le résultat.

Partie B : Une équation différentielle

On considère l'équation différentielle $(E): y' + y = \frac{1}{1+e^x}$ et l'équation différentielle $(E_1): y' + y = 0$.

1. Résoudre l'équation différentielle (E_1) .
2. Vérifier que la fonction g définie dans la question 2 de la **partie A** est une solution de l'équation (E) .
3. Soit f une fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}$.
Montrer que f est solution de (E) si et seulement si $(f - g)$ est solution de (E_1) .
4. En déduire l'ensemble des solutions de l'équation (E) .