

#### Exercice 4

1.  $W_0 = \frac{\pi}{2}$  ;  $W_1 = [-\cos x]_0^{\frac{\pi}{2}} = 1$  ;  $W_2 = \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \cos 2x) dx = \frac{1}{2} \left[ x - \frac{\sin 2x}{2} \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{4}$ .

2. a) Pour tout  $n \in \mathbb{N}$  et tout  $x \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ , on a :  $\sin x \geq 0 \Rightarrow \sin^n x \geq 0 \Rightarrow \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx \geq 0 \Rightarrow W_n \geq 0$ .

b) Pour tout  $n \in \mathbb{N}$  et tout  $x \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ , on a :  $\sin x \leq 1 \Rightarrow \sin x \cdot \sin^n x \leq \sin^n x$  (car  $\sin^n x \geq 0$ )

Donc :  $W_{n+1} \leq W_n$ , pour tout  $n \in \mathbb{N}$ . On en déduit alors que la suite  $(W_n)$  est décroissante.

c) La suite  $(W_n)$  est décroissante et minorée par 0, donc elle converge.

3.  $W_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \cdot \sin^{n-1} x dx = [-\cos x \cdot \sin^{n-1} x]_0^{\frac{\pi}{2}} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x \cdot (n-1) \cdot \sin^{n-2} x dx$   
 $= 0 + (n-1) \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \sin^2 x) \cdot \sin^{n-2} x dx = (n-1) \cdot (W_{n-2} - W_n)$ .

Alors :  $(1 + n - 1)W_n = (n-1)W_{n-2}$ . D'où :  $W_n = \frac{n-1}{n} W_{n-2}$ , pour tout entier naturel  $n \geq 2$ .

4. Pour tout  $n \in \mathbb{N}$  :  $n^2 - 1 \leq n^2 \Rightarrow \frac{n-1}{n} \leq \frac{n}{n+1} \Rightarrow \frac{n-1}{n} W_{n-1} \leq \frac{n}{n+1} W_{n-1}$  (car  $W_{n-1} \geq 0$ )  
 $\Rightarrow \frac{n-1}{n} W_{n-1} \leq W_{n+1}$  (d'après la question 3).

Or la suite  $(W_n)$  est décroissante, alors :  $W_{n+1} \leq W_n \leq W_{n-1}$ . Donc :  $\frac{n-1}{n} W_{n-1} \leq W_n \leq W_{n-1}$ .

5. On en déduit que :  $\frac{n-1}{n} \leq \frac{W_n}{W_{n-1}} \leq 1$  car  $W_{n-1} > 0$ . D'après le théorème des gendarmes :  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{W_n}{W_{n-1}} = 1$ .

6. Initialisation :  $W_2 = \frac{\pi}{4} = \frac{2 \times 1 - 1}{2 \times 1} \times \frac{\pi}{2}$  et  $W_3 = \frac{2}{3} W_1 = \frac{2}{3} = \frac{2 \times 1}{2 \times 1 - 1} \times \frac{1}{3}$

donc les propriétés sont vérifiées au rang  $n = 1$ .

Hérédité : Supposons les deux propriétés vraies à un rang  $k$  fixé (avec  $k \geq 1$ ) et démontrons-les au rang  $k + 1$ .

$$W_{2(k+1)} = W_{2k+2} = \frac{2k+1}{2k+2} W_{2k} = \frac{2k+1}{2k+2} \times \frac{1 \times 3 \times \dots \times (2k-1)}{2 \times 4 \times \dots \times 2k} \times \frac{\pi}{2} = \frac{1 \times 3 \times \dots \times (2(k+1)-1)}{2 \times 4 \times \dots \times 2(k+1)} \times \frac{\pi}{2}$$

$$W_{2(k+1)+1} = W_{2k+3} = \frac{2k+2}{2k+3} W_{2k+1} = \frac{2k+2}{2k+3} \times \frac{2 \times 4 \times \dots \times 2k}{1 \times 3 \times \dots \times (2k-1)} \times \frac{1}{2k+1}$$
$$= \frac{2 \times 4 \times \dots \times 2(k+1)}{1 \times 3 \times \dots \times (2(k+1)-1)} \times \frac{1}{2(k+1)+1}.$$

On a démontré que les deux propriétés sont héréditaires, elles sont donc vraies pour tout entier  $n$  tel que  $n \geq 1$ .

7. D'après la question 5 :  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{W_{2n+1}}{W_{2n}} = 1 \Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} \left( \frac{2 \times 4 \times \dots \times 2n}{1 \times 3 \times \dots \times (2n-1)} \times \frac{1}{2n+1} \times \frac{2 \times 4 \times \dots \times 2n}{1 \times 3 \times \dots \times (2n-1)} \times \frac{2}{\pi} \right) = 1$ .

D'où la formule de Wallis :  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left( \left( \frac{2 \times 4 \times \dots \times 2n}{1 \times 3 \times \dots \times (2n-1)} \right)^2 \times \frac{1}{2n+1} \right) = \frac{\pi}{2}$ .