

Exercice 4 : (14 points / 40)

L'objectif de cet exercice est de démontrer la formule de Wallis : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\left(\frac{2 \times 4 \times 6 \times \dots \times 2n}{1 \times 3 \times 5 \times \dots \times (2n-1)} \right)^2 \times \frac{1}{2n+1} \right) = \frac{\pi}{2}$.

Pour tout entier naturel n , on considère la suite d'intégrales (W_n) définies par $W_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n(x) dx$.

On admettra que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'intégrale W_n existe et est non nulle.

1. Calculer W_0 , W_1 et W_2 . (On rappelle que $\sin^2(x) = \frac{1 - \cos(2x)}{2}$)
2. a. Montrer que, pour tout entier naturel n , W_n est positif.
b. Montrer que la suite (W_n) est décroissante.
c. En déduire que la suite (W_n) converge. (on ne demande pas sa limite)
3. À l'aide d'une intégration par parties, montrer que, pour tout entier naturel $n \geq 2$, on a $W_n = \frac{n-1}{n} W_{n-2}$.
4. Déduire de ce qui précède que, pour tout entier naturel n , on a $\frac{n-1}{n} W_{n-1} \leq W_n \leq W_{n-1}$.
5. À l'aide du théorème des gendarmes, montrer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{W_n}{W_{n-1}} = 1$.
6. Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel $n \geq 1$, on a :

$$W_{2n} = \frac{1 \times 3 \times 5 \times \dots \times (2n-1)}{2 \times 4 \times 6 \times \dots \times 2n} \times \frac{\pi}{2} \quad \text{et} \quad W_{2n+1} = \frac{2 \times 4 \times 6 \times \dots \times 2n}{1 \times 3 \times 5 \times \dots \times (2n-1)} \times \frac{1}{2n+1}.$$

7. Déduire des deux questions précédentes la formule de Wallis :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\left(\frac{2 \times 4 \times 6 \times \dots \times 2n}{1 \times 3 \times 5 \times \dots \times (2n-1)} \right)^2 \times \frac{1}{2n+1} \right) = \frac{\pi}{2}.$$