

Corrigé du 1^{er} exercice de révision

Exercice 1

1. Pour tout $x \in [0;1]$, et tout $n \in \mathbf{N}^*$, $x^n \geq 0$ et donc $f_n(x) \geq 0$. De plus, la fonction est continue sur $[0;1]$ et donc $\int_0^1 f_n(x) dx$ est égale à l'aire du domaine délimité par la courbe représentant f_n , les droites d'équations $x=0$ et $x=1$, et l'axe des abscisses. On peut conjecturer à l'aide du graphique que l'aire de ce domaine tend vers l'aire du carré de côté 1 donc tend vers 1.
2. $I_1 = \int_0^1 \frac{1}{1+x} dx = [\ln(1+x)]_0^1 = \ln 2 - \ln 1 = \ln 2$ car $1+x > 0$ sur $[0;1]$.
3. a. Pour tout $x \in [0;1]$, $0 \leq x \leq 1$, la fonction qui à x associe x^n est strictement croissante sur $[0;1]$ et donc $0^n \leq x^n \leq 1^n$ i.e. $0 \leq x^n \leq 1$ i.e. $1 \leq 1+x^n \leq 2$. Or la fonction inverse est décroissante sur $[1;2]$ donc $\frac{1}{2} \leq \frac{1}{1+x^n} \leq \frac{1}{1}$ et $f_n(x) \leq 1$ pour $x \in [0;1]$, $0 \leq x \leq 1$.
b. Pour $x \in [0;1]$, $0 \leq x \leq 1$, $f_n(x) \leq 1$ donc d'après la positivité de l'intégrale, $\int_0^1 f_n(x) dx \leq \int_0^1 1 dx$. Or, $\int_0^1 1 dx = [x]_0^1 = 1 - 0 = 1$ donc $I_n \leq 1$.
4. Pour tout $x \in [0;1]$, on a $0 \leq x^n \leq 1$ et par croissance de la fonction carrée sur $[0;1]$, $0^2 \leq (x^n)^2 \leq 1^2$ donc $-1 \leq -(x^n)^2 \leq 0$ et donc $0 \leq 1 - (x^n)^2 \leq 1$ i.e. $0 \leq (1-x^n)(1+x^n) \leq 1$ et donc $1-x^n \leq \frac{1}{1+x^n}$.
5. $\int_0^1 (1-x^n) dx = \left[x - \frac{1}{n+1} x^{n+1} \right]_0^1 = \left(1 - \frac{1}{n+1} \right) - 0 = \frac{n}{n+1}$.
6. On sait que pour tout $x \in [0;1]$, $1-x^n \leq \frac{1}{1+x^n}$, donc par la positivité de l'intégrale $\int_0^1 (1-x^n) dx \leq \int_0^1 \frac{1}{1+x^n} dx$ i.e. $\frac{n}{n+1} \leq I_n$.

D'après 3.a., on a $\frac{n}{n+1} \leq I_n \leq 1$. Or, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n}{n+1} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n}{n \left(1 + \frac{1}{n} \right)} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{1 + \frac{1}{n}} = 1$
donc, d'après le théorème d'encadrement, la suite (I_n) converge vers 1.