

Exercice (55 minutes)

Soit  $n$  un entier naturel supérieur ou égal à 1. On note  $f_n$  la fonction définie pour tout réel  $x$  de l'intervalle  $[0 ; 1]$  par  $f_n(x) = \frac{1}{1+x^n}$ .

Pour tout entier  $n \geq 1$ , on définit le réel  $I_n$  par  $I_n = \int_0^1 f_n(x)dx = \int_0^1 \frac{1}{1+x^n} dx$ .

1. Les représentations graphiques de certaines fonctions  $f_n$  obtenues à l'aide d'un logiciel sont tracées ci-contre. En expliquant soigneusement votre démarche, conjecturer, pour la suite  $(I_n)$  l'existence et la valeur éventuelle de la limite, lorsque  $n$  tend vers  $+\infty$ .

2. Calculer la valeur exacte de  $I_1$ .

3. a. Démontrer que, pour tout réel  $x$  de l'intervalle  $[0 ; 1]$  et pour tout entier naturel  $n \geq 1$ , on a :  $\frac{1}{1+x^n} \leq 1$

b. En déduire que, pour tout entier naturel  $n \geq 1$ , on a :  $I_n \leq 1$ .

4. Démontrer que, pour tout réel  $x$  de l'intervalle  $[0 ; 1]$  et pour tout entier naturel  $n \geq 1$ , on a :  $1-x^n \leq \frac{1}{1+x^n}$ .

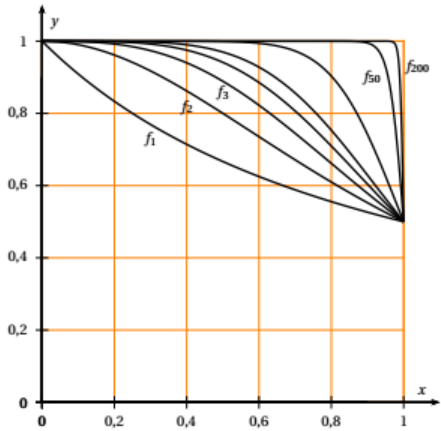
5. Calculer l'intégrale  $\int_0^1 (1-x^n)dx$ .

6. À l'aide des questions précédentes, démontrer que la suite  $(I_n)$  est convergente et déterminer sa limite.

7. On considère l'algorithme ci-après :

a. Quelle valeur, arrondie au centième, renvoie cet algorithme si l'on entre les valeurs  $n = 2$  et  $p = 5$  ? On justifiera la réponse en reproduisant sur la copie et en complétant le tableau ci-contre avec les différentes valeurs prises par les variables, à chaque étape de l'algorithme. Les valeurs de  $I$  seront arrondies au millièm.

| $k$ | $x$ | $I$ |
|-----|-----|-----|
| 0   |     |     |
|     |     |     |
|     |     |     |
|     |     |     |
| 4   |     |     |



Variables :

$n, p$  et  $k$  sont des entiers naturels  
 $x$  et  $I$  sont des réels

Initialisation :  $I$  prend la valeur 0

Traitement : Demander un entier  $n \geq 1$

Demander un entier  $p \geq 1$

Pour  $k$  allant de 0 à  $p - 1$  faire :

$x$  prend la valeur  $\frac{k}{p}$

$I$  prend la valeur  $I + \frac{1}{1+x^n} \times \frac{1}{p}$

Fin Pour  
Afficher  $I$

b.

Expliquer pourquoi cet algorithme permet d'approcher l'intégrale  $I_n$ .