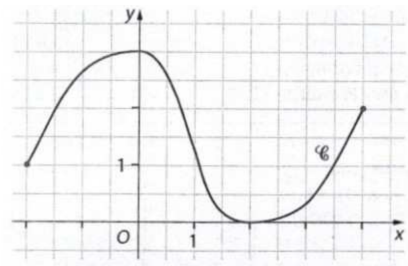


Séquence XXIV – Calcul intégral – généralités

Exercice 1

Soit f une fonction définie sur $[-2 ; 4]$ dont voici la courbe représentative :



Préciser si les affirmations suivantes sont vraies ou fausses :

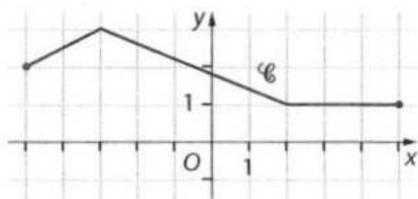
1. $\int_{-2}^4 f(x) dx = \int_{-2}^4 f(t) dt$
2. $\int_{-2}^0 f(x) dx \geq 4$
3. $\int_2^4 f(x) dx \leq 2$
4. $\int_0^2 f(x) dx \leq 2$
5. $\int_{-2}^1 f(x) dx \geq 6$

Solution de l'exercice 1

1. Vrai, la variable est muette.
2. Vrai, en comptant le nombre d'unités d'aires.
3. Vrai.
4. Faux.
5. Vrai.

Exercice 2

La courbe $\mathcal{C}$ suivante est formée de segments. Elle représente une fonction f définie sur $[-5 ; 5]$



1. Calculer les intégrales :

$$\bullet \int_{-5}^{-3} f(x) dx \quad \bullet \int_{-3}^2 f(x) dx \quad \bullet \int_2^5 f(x) dx$$

2. En déduire la valeur de $\int_{-5}^5 f(x) dx$

Solution de l'exercice 2

1. $\bullet \int_{-5}^{-3} f(x) dx = 5$
 $\bullet \int_{-3}^2 f(x) dx = 10$

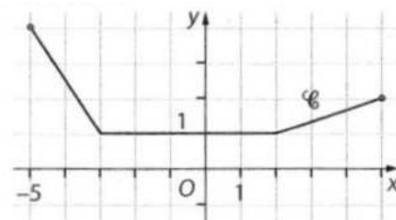
$$\bullet \int_2^5 f(x) dx = 3$$

2. Donc

$$\begin{aligned} & \int_{-5}^5 f(x) dx \\ &= \int_{-5}^{-3} f(x) dx + \int_{-3}^2 f(x) dx + \int_2^5 f(x) dx \\ &= 5 + 10 + 3 \\ &= 18 \end{aligned}$$

Exercice 3

La courbe $\mathcal{C}$ suivante est formée de segments. Elle représente une fonction f définie sur $[-5 ; 5]$.



Calculer l'intégrale $\int_{-5}^5 f(t) dt$.

Solution de l'exercice 3

$$\begin{aligned} \int_{-5}^5 f(t) dt &= \int_{-5}^{-2} f(t) dt + \int_{-2}^2 f(t) dt + \int_2^5 f(t) dt \\ &= 5 + 5 + 4,5 \\ &= 14,5 \end{aligned}$$

Exercice 4

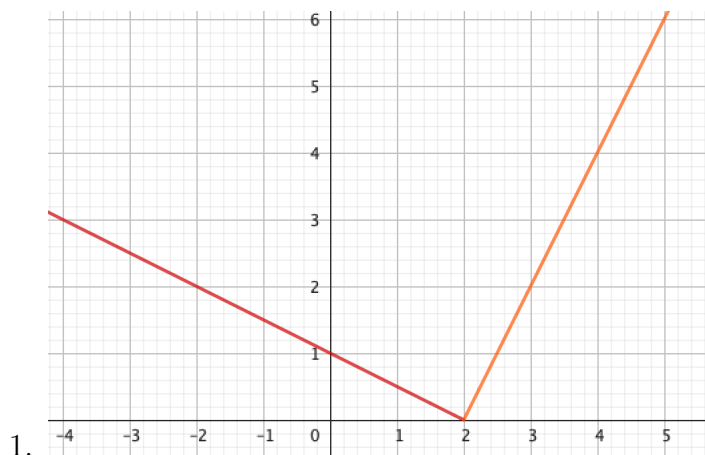
On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \begin{cases} -0,5x + 1 & \text{si } x \in]-\infty ; 2] \\ 2x - 4 & \text{si } x \in]2 ; +\infty[\end{cases}$$

On note $\mathcal{C}$ la courbe représentative de f dans un repère orthonormé d'unité graphique 2 cm.

1. Représenter graphiquement la fonction f sur $[-1 ; 4]$. La fonction f est-elle continue et positive sur $\mathbb{R}$?
2. Calculer $\int_{-1}^4 f(x) dx$
3. En déduire l'aire, en cm^2 , du domaine délimité par la courbe $\mathcal{C}$, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = -1$ et $x = 4$.

Solution de l'exercice 4



1.

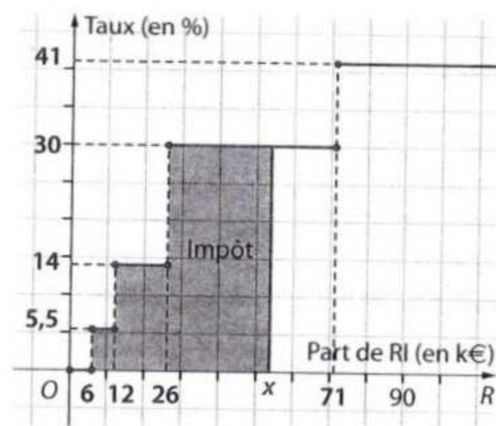
2.

$$\begin{aligned}
 & \int_{-1}^4 f(x) dx \\
 &= \int_{-1}^0 f(x) dx + \int_0^2 f(x) dx + \int_2^4 f(x) dx \\
 &= 1 + 1 + 3 \\
 &= 5
 \end{aligned}$$

3. Ainsi, puisque l'unité graphique est 2 cm, une unité d'aire est $2 \times 2 = 4 \text{ cm}^2$, et l'aire cherchée est $5 \times 4 = 20 \text{ cm}^2$.

Exercice 5

Le graphique ci-dessous indique les tranches de revenu imposable par part, arrondies à un millier d'euros, et le taux marginal d'imposition :



1. (a) Justifier que l'impôt sur le revenu (noté IR), en k€, pour un revenu imposable R de 26 000 € est

$$IR = 6 \times 0,055 + (26 - 12) \times 0,14$$

(b) Calculer le montant de l'impôt pour une part de revenu imposable de 71 k€.

2. Soit x un revenu imposable dans la tranche au taux marginal de 30 %.

(a) Donner une interprétation graphique de $\int_{26}^x 0,3 dR$

(b) Exprimer cette intégrale en fonction de x .

(c) En déduire l'expression de l'impôt IR en fonction du revenu x dans $[26 ; 71]$.

Solution de l'exercice 5 Corrigé en classe.

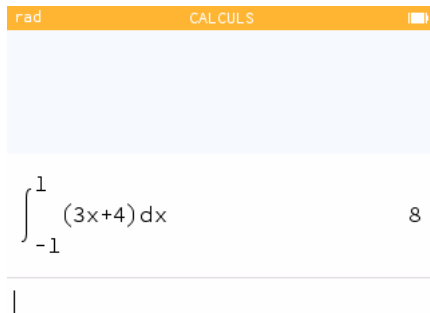
Séquence XXIV – Calcul intégral

Calculs exacts d'intégrales



Exercice 6

Vérifier l'affichage obtenu à l'écran d'une calculatrice :



Exercice 7

Dans chaque cas, déterminer $\int_2^5 f(x) dx$ lorsque f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

- $f(x) = 2x - 3$
- $f(x) = 6 - x$



Exercice 8

Démontrer les propriétés suivantes : soient f et g deux fonctions définies et continues sur un intervalle $[a ; b]$.

Soit F une primitive de f sur $[a ; b]$.

Soit G une primitive de g sur $[a ; b]$.

- pour tout $a \in \mathbb{R}$, $\int_a^a f(x) dx = 0$
- $\int_a^b f(x) dx = - \int_b^a f(x) dx$
- La relation de Chasles (à énoncer et démontrer)
- formule de linéarité n° 1 :

$$\int_a^b [f(x) + g(x)] dx = \int_a^b f(x) dx + \int_a^b g(x) dx$$

- formule de linéarité n° 2 :

$$\forall \lambda \in \mathbb{R}, \int_a^b \lambda f(x) dx = \lambda \int_a^b f(x) dx$$

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a) = - (F(a) - F(b))$$

D'où

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x) dx &= - (F(a) - F(b)) \\ &= - \int_b^a f(x) dx \\ &= F(a) - F(b) \end{aligned}$$

- On a $\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$. De même, on a

$$\begin{aligned} \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx &= [F(c) - F(a)] + [F(b) - F(c)] \\ &= F(c) - F(a) + F(b) - F(c) \\ &= F(b) - F(a) \end{aligned}$$

D'où

$$\begin{aligned} \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx &= F(b) - F(a) \\ &= \int_a^b f(x) dx \end{aligned}$$

- On a

$$\int_a^b [f(x) + g(x)] dx = (F + G)(b) - (F + G)(a)$$

De même,

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x) dx + \int_a^b g(x) dx &= [F(b) - F(a)] + [G(b) - G(a)] \\ &= F(b) - F(a) + G(b) - G(a) \\ &= F(b) + G(b) - F(a) - G(a) \\ &= (F + G)(b) - (F + G)(a) \end{aligned}$$

On a donc

$$\begin{aligned} \int_a^b [f(x) + g(x)] dx &= (F + G)(b) - (F + G)(a) \\ &= (F + G)(b) - (F + G)(a) \end{aligned}$$

- On a $\int_a^b \lambda f(x) dx = \lambda F(b) - \lambda F(a)$. De même,

$$\begin{aligned} \lambda \int_a^b f(x) dx &= \lambda [F(b) - F(a)] \\ &= \lambda F(b) - \lambda F(a) \end{aligned}$$

Donc, on a

$$\int_a^b \lambda f(x) dx = \lambda F(b) - \lambda F(a) = \lambda \int_a^b f(x) dx$$

Solution de l'exercice 8

- $\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a) = 0$.
- On a $\int_b^a f(x) dx = F(a) - F(b)$.



Exercice 9

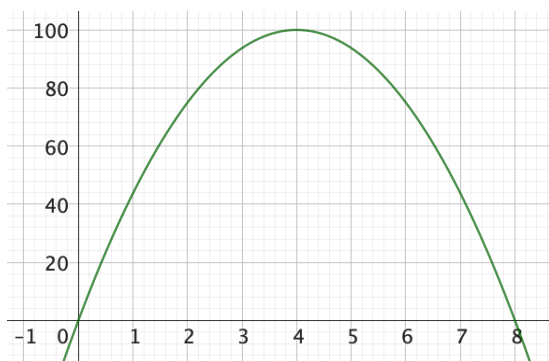
Dans un cadre économique, on appelle *fonction de satisfaction* toute fonction f définie sur une partie de $\mathbb{R}$ et à valeurs dans l'intervalle $[0 ; 100]$.

On dit qu'il y a *saturation* lorsque la satisfaction est maximale, i.e. si f prend la valeur 100.

On définit de plus la fonction *envie*, notée v , dérivée de la fonction f . On dit qu'il y a *envie* lorsque v est positive. Sinon, on dit qu'il y a *rejet*.

Partie A

On donne ci-dessous l'allure de la courbe représentative d'une fonction de satisfaction f définie et dérivable sur l'intervalle $[0 ; 8]$.



1. (a) Pour quelle quantité x de produit y a-t-il saturation ?
(b) Sur quel(s) intervalle(s) y a-t-il envie ?
Y a-t-il rejet ?
2. (a) Par lecture graphique, donner $v(4)$
(b) Exprimer $v(x)$ en fonction de x sachant que v est une fonction affine définie sur l'intervalle $[0 ; 8]$ vérifiant $v(0) = 50$.

Partie B

La fonction *envie* v pour un salaire dans une entreprise est modélisée, pour tout x de $[0 ; +\infty[$ par $v(x) = \frac{100}{(x+1)^2}$ où x désigne le salaire annuel d'un employé, en milliers d'euros.

1. Sachant que $f(0) = 0$, montrer que

$$f(x) = \frac{100x}{x+1}$$

2. (a) Étudier le sens de variation de f sur $[0 ; +\infty[$. Dresser le tableau de variation de f .
(b) Interpréter le sens de variation de f grâce à la notion de satisfaction.

Séquence XXIV – Calcul intégral – applications

Aire entre deux courbes

Exercice 10

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \frac{1}{3}x - 1$$

- Déterminer $I = \int_{-3}^6 f(x) dx$.
- Quelle est l'aire (en u.a.) de la portion de plan délimitée par la courbe $\mathcal{C}_f$, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = -3$ et $x = 6$.

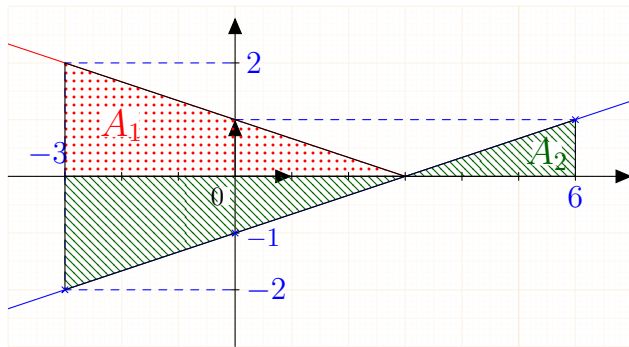
Solution de l'exercice 10

- On a F la fonction définie par $F(x) = \frac{1}{6}x^2 - x$ qui est une primitive de f sur $\mathbb{R}$, car en effet, on a :
pour tout $x \in \mathbb{R}$, $F'(x) = \frac{1}{6} \times 2x - 1 = \frac{1}{3}x - 1 = f(x)$.

$$\text{On a } F(6) = \frac{1}{6} \times 36 - 6 = 0 \text{ et } F(-3) = \frac{1}{6} \times 9 + 3 = \frac{9}{2}.$$

$$\text{D'où } I = F(6) - F(-3) = -\frac{9}{2}.$$

Interprétation géométrique



- f n'est pas positive sur $[-3 ; 6]$, donc $\int_{-3}^6 f(x) dx$ n'est pas une aire.

Si on cherche à calculer l'aire au-dessus de l'axe des abscisses, on a :

$$\mathcal{A} = A_1 + A_2 = \frac{1}{2} (6 \times 2) + \frac{1}{2} (3 \times 1).$$

Pour calculer « l'aire hachurée » en vert, on a :

$$\begin{aligned} \int_{-3}^6 f(x) dx &= \int_{-3}^0 f(x) dx + \int_0^6 f(x) dx \\ &= -6 + \frac{3}{2} \end{aligned}$$

car $\mathcal{C}_f$ est en dessous de l'axe des abscisses sur $[-3 ; 3]$. Donc $\int_{-3}^6 f(x) dx = -\frac{9}{2}$

Exercice 11

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = -x^2 + 6$$

Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$g(x) = x^2 - 2x + 2$$

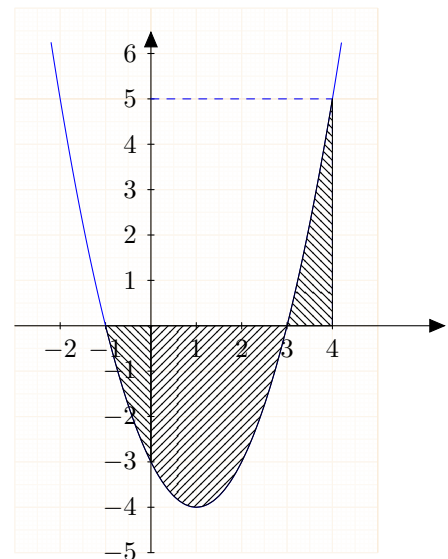
Déterminer l'aire la portion de plan délimitée par $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$.

Solution de l'exercice 11

Exercice 12

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = x^2 - 2x - 3$$



Déterminer l'aire de la portion de plan hachurée.

Solution de l'exercice 12

Signe de $f(x) = x^2 - 2x - 3$.

x	$-\infty$	-1	3	$+\infty$
$x^2 - 2x - 3$		+	-	+

La fonction F définie par $F(x) = \frac{1}{3}x^3 - x^2 - 3x$ est une primitive de f .

On note A l'aire recherchée. Soit A_1 et A_2 les deux aires hachurées. On a $A = A_1 + A_2$.

On a $A_1 = -\int_{-1}^3 f(x) \, dx$ et $A_2 = \int_3^4 f(x) \, dx$.

- Calcul de A_1 .

$$\begin{aligned}\int_{-1}^3 f(x) \, dx &= F(3) - F(-1) \\ &= -9 - \frac{5}{3} \\ &= -\frac{32}{3}\end{aligned}$$

- Calcul de A_2 .

$$\begin{aligned}\int_3^4 f(x) \, dx &= F(4) - F(3) \\ &= -\frac{20}{3} - (-9) \\ &= \frac{7}{3}\end{aligned}$$

On a donc $A = \frac{32}{3} + \frac{7}{3} = 13$ u.a. .

Si 1 unité d'aire = un grand carreau, alors

$$A = 13 \times 0,64 \, \text{cm}^2 = 8,32 \, \text{cm}^2$$

Si 1 unité d'aire = quatre petits carreaux, alors

$$A = 13 \times 1 \, \text{cm}^2 = 13 \, \text{cm}^2$$

Valeur moyenne



Exercice 13

Déterminer la valeur moyenne de la fonction f définie par $f(x) = 3x^2 - 4x + 5$ sur $[0 ; 10]$.



Exercice 14

1. Calculer la valeur moyenne sur $[0 ; 6]$ de la fonction f telle que $f(t) = 6t^2 - t^3$.
2. Lors d'une épidémie de grippe dans un lycée, le nombre de malades, t jours après l'apparition des premiers cas, est donnée par la fonction f précédente.
 - a) Déterminer le nombre moyen de malades journalier sur cette période de 6 jours.
 - b) Construire la représentation graphique de la fonction f et donner une interprétation graphique du nombre moyen de malades sur cette période.

Solution de l'exercice 14

1. On a $f(t) = 6t^2 - t^3$. On a alors

$$\mu = \frac{1}{6-0} \int_0^6 (6t^2 - t^3) \, dt.$$

Une primitive de f est la fonction F définie par

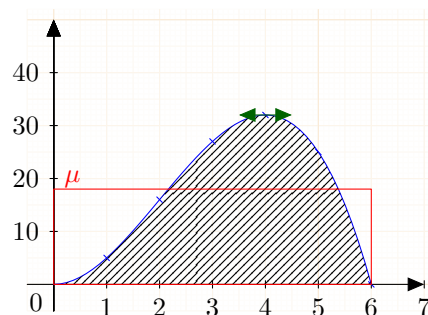
$$F(t) = 6 \times \frac{1}{3}t^3 - \frac{1}{4}t^4 = 2t^3 - \frac{1}{4}t^4$$

On a alors $F(6) = 2 \times 6^3 - \frac{1}{4}6^4 = 432 - 324 = 108$

et $F(0) = 0$. D'où $\mu = \frac{1}{6} \times F(6) = \frac{1}{6} \times 108 = 18$.

Ainsi la valeur moyenne de f est 18.

2. a) D'après la question précédente, il y a 18 malades journalier sur cette période de 6 jours.
b) jours.



Le pic de l'épidémie est obtenue au bout de 4 jours. Il est de 32 malades.

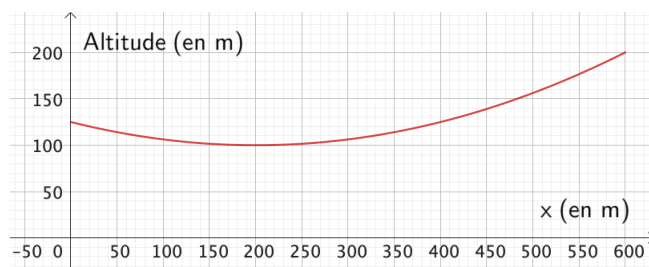


Exercice 15

Un terrain a le profil indiqué ci-dessous, modélisé par la fonction f définie sur l'intervalle $[0 ; 600]$ par :

$$f(x) = \frac{x^2}{1600} - \frac{x}{4} + 125$$

où x est l'abscisse en mètres d'un point du terrain et $f(x)$ en altitude en mètres.



1. Déterminer la valeur moyenne de f sur l'intervalle $[0 ; 600]$
2. On souhaite niveler le terrain de façon que les remblais équilibrent les déblais. Préciser à quelle hauteur doit être situé le terrain nivelé.

Exercice 16

1. Démontrer que : $1 \leq \int_{-1}^1 \frac{1}{1+x^2} dx \leq 2$.

2. Démontrer que :

$$\ln(\sqrt{2}) \leq \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\cos x}{x} dx \leq \sqrt{3} \ln(\sqrt{2})$$

3. Démontrer que : $\int_0^1 x^2 \sin x dx \leq \int_0^1 x \sin x dx$.

4. Démontrer que, pour tout $a \geq 0$:

$$\int_0^a \sqrt{1+t^2} dt \geq a$$

Quelle inégalité peut-on écrire dans le cas où $a \leq 0$?

5. Pour tout entier naturel non nul n , on pose :

$$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{6}} x^n \sin x dx$$

(a) Montrer que, pour tout entier naturel non nul n :

$$0 \leq I_n \leq \left(\frac{\pi}{6}\right)^n$$

(b) Calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n$.

c'est-à-dire :

$$\frac{1}{2} \leq \cos x \leq \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Sur cet intervalle, $x > 0$, donc en divisant par x (ce qui conserve le sens des inégalités) :

$$\frac{1}{2x} \leq \frac{\cos x}{x} \leq \frac{\sqrt{3}}{2x}.$$

Par intégration sur $\left[\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}\right]$:

$$\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{1}{2x} dx \leq \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\cos x}{x} dx \leq \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sqrt{3}}{2x} dx.$$

Or

$$\begin{aligned} \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{1}{2x} dx &= \frac{1}{2} [\ln x]_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \\ &= \frac{1}{2} \left(\ln \frac{\pi}{3} - \ln \frac{\pi}{6} \right) \\ &= \frac{1}{2} \ln \left(\frac{\pi/3}{\pi/6} \right) \\ &= \frac{1}{2} \ln 2 = \ln \sqrt{2}. \end{aligned}$$

De même :

$$\begin{aligned} \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sqrt{3}}{2x} dx &= \frac{\sqrt{3}}{2} \ln 2 \\ &= \sqrt{3} \ln \sqrt{2}. \end{aligned}$$

On obtient donc :

$$\ln(\sqrt{2}) \leq \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\cos x}{x} dx \leq \sqrt{3} \ln(\sqrt{2}).$$

3. Pour tout $x \in [0, 1]$, on a $0 \leq x \leq 1$, donc $x^2 \leq x$.

De plus, sur $[0, 1] \subset [0, \pi]$, on a $\sin x \geq 0$.

Par produit de deux quantités positives, on obtient :

$$x^2 \sin x \leq x \sin x \quad \text{pour tout } x \in [0, 1].$$

Par croissance de l'intégrale sur $[0, 1]$ (les deux fonctions étant continues) :

$$\int_0^1 x^2 \sin x dx \leq \int_0^1 x \sin x dx.$$

4. On raisonne par disjonction de cas :

Cas $a \geq 0$:

Pour tout $t \in \mathbb{R}$, on a $t^2 \geq 0$, donc $1+t^2 \geq 1$, et par croissance de la racine carrée :

$$\sqrt{1+t^2} \geq 1.$$

Pour $a \geq 0$, par intégration sur $[0, a]$:

$$\int_0^a \sqrt{1+t^2} dt \geq \int_0^a 1 dt = a.$$

Solution de l'exercice 16

1. Pour tout $x \in [-1, 1]$, on a $x^2 \geq 0$, donc $1+x^2 \geq 1$, ce qui donne :

$$0 < \frac{1}{1+x^2} \leq 1.$$

De plus, pour tout $x \in [-1, 1]$, on a $x^2 \leq 1$, donc $1+x^2 \leq 2$, ce qui donne :

$$\frac{1}{1+x^2} \geq \frac{1}{2}.$$

Ainsi, pour tout $x \in [-1, 1]$:

$$\frac{1}{2} \leq \frac{1}{1+x^2} \leq 1.$$

La fonction $x \mapsto \frac{1}{1+x^2}$ est continue sur $[-1, 1]$. Par croissance de l'intégrale,

$$\int_{-1}^1 \frac{1}{2} dx \leq \int_{-1}^1 \frac{1}{1+x^2} dx \leq \int_{-1}^1 1 dx,$$

c'est-à-dire :

$$1 \leq \int_{-1}^1 \frac{1}{1+x^2} dx \leq 2$$

2. Sur l'intervalle $\left[\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}\right]$, étudions la fonction $\cos$.

La fonction cosinus est décroissante sur $[0, \pi]$, donc sur $\left[\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}\right]$. On a :

$$\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) \leq \cos x \leq \cos\left(\frac{\pi}{6}\right),$$

Donc :

$$\int_0^a \sqrt{1+t^2} dt \geq a \quad \text{pour tout } a \geq 0.$$

Cas $a \leq 0$:

Si $a \leq 0$, alors $[a, 0]$ est un intervalle bien défini et on a :

$$\int_0^a \sqrt{1+t^2} dt = - \int_a^0 \sqrt{1+t^2} dt.$$

Or, sur $[a, 0]$, on a toujours $\sqrt{1+t^2} \geq 1$, donc :

$$\int_a^0 \sqrt{1+t^2} dt \geq \int_a^0 1 dt = 0 - a = -a.$$

Ainsi :

$$\int_0^a \sqrt{1+t^2} dt = - \int_a^0 \sqrt{1+t^2} dt \leq -(-a) = a.$$

Donc :

$$\int_0^a \sqrt{1+t^2} dt \leq a \quad \text{pour tout } a \leq 0.$$

5. Pour tout entier naturel non nul n , on pose :

$$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{6}} x^n \sin x dx$$

5.a) Sur l'intervalle $\left[0, \frac{\pi}{6}\right]$, on a :

- $x \geq 0$, donc $x^n \geq 0$;
- $\sin x \geq 0$ (car $\left[0, \frac{\pi}{6}\right] \subset [0, \pi]$).

Donc $x^n \sin x \geq 0$ sur $\left[0, \frac{\pi}{6}\right]$, et par positivité de l'intégrale :

$$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{6}} x^n \sin x dx \geq 0.$$

D'autre part, sur $\left[0, \frac{\pi}{6}\right] \subset [0, \pi]$, on a $\sin x \leq 1$, donc :

$$x^n \sin x \leq x^n.$$

Par croissance de l'intégrale :

$$I_n \leq \int_0^{\frac{\pi}{6}} x^n dx = \left[\frac{x^{n+1}}{n+1} \right]_0^{\frac{\pi}{6}} = \frac{1}{n+1} \left(\frac{\pi}{6} \right)^{n+1}.$$

Or $\frac{1}{n+1} \leq 1$ et $\frac{\pi}{6} < 1$, donc :

$$I_n \leq \frac{1}{n+1} \left(\frac{\pi}{6} \right)^{n+1} = \frac{1}{n+1} \times \frac{\pi}{6} \times \left(\frac{\pi}{6} \right)^n \leq \left(\frac{\pi}{6} \right)^n.$$

Finalement :

$$0 \leq I_n \leq \left(\frac{\pi}{6} \right)^n \quad \text{pour tout entier } n \geq 1.$$

5.b) On a $\frac{\pi}{6} \approx 0,52 < 1$.

Donc

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{\pi}{6} \right)^n = 0.$$

D'après l'encadrement établi en 5.a) :

$$0 \leq I_n \leq \left(\frac{\pi}{6} \right)^n,$$

et par le théorème des gendarmes :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n = 0.$$



Exercice 17

On considère la fonction définie sur $[0; +\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{\ln(x+e)}{x+e}$$

1. Calculer les limites de $f(x)$ en 0 et $+\infty$ et étudier ses variations sur $[0; +\infty[$.
2. Soit (u_n) la suite définie par

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \int_n^{n+1} f(x) dx$$

(a) Montrer que pour tout entier naturel n :

$$f(n+1) \leq u_n \leq f(n)$$

(b) La suite (u_n) est-elle convergente ?

3. Calculer $I_n = \int_0^n f(x) dx$.

4. Soit $S_n = \sum_{k=0}^{n-1} u_k$.

(a) Calculer S_n .

(b) La suite (S_n) est-elle convergente ?

Solution de l'exercice 17

Question 1. Limite en 0 :

Par continuité, on a directement :

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \frac{\ln(0+e)}{0+e} = \frac{\ln e}{e} = \frac{1}{e}.$$

Limite en $+\infty$:

On a $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x+e) = +\infty$.

En posant $X = x+e$, on obtient :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{X \rightarrow +\infty} \frac{\ln X}{X} = 0$$

par croissances comparées.

Donc :

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \frac{1}{e} \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0.$$

Variations :

La fonction f est dérivable sur $[0; +\infty[$ comme quotient de fonctions dérivables dont le dénominateur ne s'annule pas.

$$\begin{aligned}\forall x \in [0; +\infty[, f'(x) &= \frac{\frac{1}{x+e} \times (x+e) - \ln(x+e) \times 1}{(x+e)^2} \\ &= \frac{1 - \ln(x+e)}{(x+e)^2}.\end{aligned}$$

Le dénominateur $(x+e)^2$ est strictement positif pour tout $x \in [0; +\infty[$. Le signe de $f'(x)$ est donc celui du numérateur $1 - \ln(x+e)$.

On a

$$\begin{aligned}1 - \ln(x+e) \geq 0 &\iff \ln(x+e) \leq 1 \\ &\iff x+e \leq e \\ &\iff x \leq 0\end{aligned}$$

Sur $[0; +\infty[$, on a $x \geq 0$, donc $\ln(x+e) \geq \ln(e) = 1$, ce qui donne $1 - \ln(x+e) \leq 0$.

Ainsi, $f'(x) \leq 0$ sur $[0; +\infty[$, avec égalité uniquement en $x = 0$.

La fonction f est strictement décroissante sur $[0; +\infty[$.

Question 2. Soit (u_n) la suite définie, pour tout $n \in \mathbb{N}$, par :

$$u_n = \int_n^{n+1} f(x) dx$$

2.a) La fonction f est décroissante sur $[0; +\infty[$, donc pour tout $x \in [n; n+1]$:

$$f(n+1) \leq f(x) \leq f(n).$$

Par croissance de l'intégrale sur $[n; n+1]$:

$$\int_n^{n+1} f(n+1) dx \leq \int_n^{n+1} f(x) dx \leq \int_n^{n+1} f(n) dx,$$

c'est-à-dire :

$$[f(n+1)x]_n^{n+1} \leq u_n \leq [f(n)x]_n^{n+1}$$

ou encore

$$f(n+1) \leq u_n \leq f(n).$$

Donc :

$$\forall n \in \mathbb{N}, f(n+1) \leq u_n \leq f(n)$$

2.b) D'après la question 1, on a $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$.

Donc :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} f(n) = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} f(n+1) = 0.$$

D'après l'encadrement établi en 2.a) :

$$f(n+1) \leq u_n \leq f(n),$$

et par le théorème des gendarmes :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0.$$

La suite (u_n) est donc convergente, de limite 0.

Question 3. Soit $I_n = \int_0^n f(x) dx$.

Une primitive de f est la fonction F définie, pour tout $x \in [0; +\infty[$, par

$$F(x) = \frac{(\ln(x+e))^2}{2}.$$

On calcule alors :

$$\begin{aligned}I_n &= \left[\frac{(\ln(x+e))^2}{2} \right]_0^n \\ &= \frac{(\ln(n+e))^2}{2} - \frac{(\ln(0+e))^2}{2} \\ &= \frac{(\ln(n+e))^2}{2} - \frac{(\ln e)^2}{2} \\ &= \frac{(\ln(n+e))^2}{2} - \frac{1}{2}.\end{aligned}$$

Question 4. Soit $S_n = \sum_{k=0}^{n-1} u_k$.

4.a) On a

$$\begin{aligned}S_n &= \sum_{k=0}^{n-1} u_k \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} \int_k^{k+1} f(x) dx.\end{aligned}$$

Par la relation de Chasles, les intervalles $[0; 1]$, $[1; 2]$, $\dots$, $[n-1; n]$ sont consécutifs et leur réunion est $[0; n]$.
Donc

$$\begin{aligned}S_n &= \int_0^1 f(x) dx + \int_1^2 f(x) dx + \dots + \int_{n-1}^n f(x) dx \\ &= \int_0^n f(x) dx \\ &= I_n.\end{aligned}$$

D'après la question 3 :

$$S_n = \frac{\ln^2(n+e) - 1}{2}.$$

4.b) On a :

$$S_n = \frac{\ln^2(n+e) - 1}{2}.$$

On a $\lim_{n \rightarrow +\infty} n+e = +\infty$, donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} \ln(n+e) = +\infty$, et par conséquent $\lim_{n \rightarrow +\infty} \ln^2(n+e) = +\infty$.

Ainsi :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = +\infty.$$

On en conclut que (S_n) est divergente (elle tend vers $+\infty$).

Remarque : Bien que la suite (u_n) converge vers 0, la série de terme général u_n diverge. Cela illustre le fait que la condition $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$ est nécessaire mais non suffisante pour la convergence d'une série.

Exercice 18

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\ln(1+x^2)}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

On note $\mathcal{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthogonal.

On se propose dans la suite d'étudier la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, F(x) = \int_0^x f(t) dt$$

On ne cherchera pas dans la suite à expliciter la fonction F .

- Pourquoi la fonction F est-elle définie sur $\mathbb{R}$? dérivable sur $\mathbb{R}$? Quelle est sa fonction dérivée ? En déduire les variations de F sur $\mathbb{R}$.
- Par un argument graphique, justifier que pour tout $x > 0$: $\int_{-x}^0 f(t) dt = - \int_0^x f(t) dt$
En déduire que la fonction F est paire.
- (a) Montrer que la fonction f est dérivable en 0 et déterminer $f'(0)$.
(b) À l'aide par exemple d'un argument de convexité, étudier la position de $\mathcal{C}$ par rapport à sa tangente en 0.
(c) En déduire que : $0 \leq F(1) \leq \frac{1}{2}$.
- (a) Justifier que pour tout $t \geq 1$:

$$\frac{\ln(t^2)}{t} \leq \frac{\ln(1+t^2)}{t} \leq \frac{\ln(2t^2)}{t}$$

- (b) En déduire que pour tout $x \geq 1$:

$$F(x) - F(1) \geq 2 \int_1^x \frac{\ln t}{t} dt$$

- (c) Pour $x \geq 1$, calculer $\int_1^x \frac{\ln t}{t} dt$.
En déduire la limite de F en $+\infty$.

Pour $x > 0$: on divise par $x > 0$:

$$\frac{x}{1+x^2} \leq \frac{\ln(1+x^2)}{x} \leq x.$$

Comme $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x}{1+x^2} = 0$ et $\lim_{x \rightarrow 0^+} x = 0$, par le théorème des gendarmes :

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 0 = f(0).$$

Pour $x < 0$: on divise par $x < 0$ (les inégalités sont renversées) :

$$x \leq \frac{\ln(1+x^2)}{x} \leq \frac{x}{1+x^2}.$$

Comme $\lim_{x \rightarrow 0^-} x = 0$ et $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x}{1+x^2} = 0$, par le théorème des gendarmes :

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = 0 = f(0).$$

Donc f est continue en 0, et par conséquent continue sur $\mathbb{R}$.

La fonction F définie, pour tout $x \in \mathbb{R}$, par $F(x) = \int_0^x f(t) dt$ est donc bien définie sur $\mathbb{R}$ car f est continue sur $\mathbb{R}$.

D'après le théorème fondamental de l'analyse, F est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $F' = f$. On en conclut que

$$F \text{ est dérivable sur } \mathbb{R} \\ \text{et } F'(x) = f(x) \text{ pour tout } x \in \mathbb{R}.$$

Variations de F :

Pour $x > 0$: $x > 0$ et $1+x^2 > 1$, donc $\ln(1+x^2) > 0$, d'où $f(x) > 0$.

Pour $x < 0$: $x < 0$ et $\ln(1+x^2) > 0$, donc $f(x) < 0$.

Pour $x = 0$: $f(0) = 0$.

Ainsi $F'(x) = f(x) > 0$ pour $x > 0$ et $F'(x) < 0$ pour $x < 0$.

F est strictement décroissante sur $]-\infty; 0]$
et strictement croissante sur $[0; +\infty[$

Solution de l'exercice 18

1. La fonction f est continue sur $\mathbb{R}^*$ comme quotient de fonctions continues dont le dénominateur ne s'annule pas.

Montrons que f est continue en 0. On a, pour $x \neq 0$:

On utilise l'encadrement : pour tout $u > 0$,

$$\frac{u}{1+u} \leq \ln(1+u) \leq u.$$

En posant $u = x^2 > 0$ pour $x \neq 0$:

$$\frac{x^2}{1+x^2} \leq \ln(1+x^2) \leq x^2.$$

2. La fonction g définie, pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, par $g(x) = \frac{\ln(1+x^2)}{x}$ vérifie :

$$g(-x) = \frac{\ln(1+(-x)^2)}{-x} = \frac{\ln(1+x^2)}{-x} = -g(x).$$

Donc f est impaire sur $\mathbb{R}$ (en incluant $f(0) = 0$).

Graphiquement, la courbe $\mathcal{C}$ est symétrique par rapport à l'origine. L'aire algébrique sous la courbe entre $-x$ et 0 est l'opposée de l'aire entre 0 et x .

Ainsi, pour tout $x > 0$:

$$\int_{-x}^0 f(t) dt = - \int_0^x f(t) dt.$$

On en déduit, pour $x > 0$:

$$\begin{aligned} F(-x) &= \int_0^{-x} f(t) dt \\ &= - \int_{-x}^0 f(t) dt \\ &= - \left(- \int_0^x f(t) dt \right) \\ &= \int_0^x f(t) dt \\ &= F(x). \end{aligned}$$

Pour $x < 0$, on pose $y = -x > 0$ et on a $F(x) = F(-y) = F(y) = F(-x)$.

De plus, $F(0) = 0 = F(-0)$. La fonction F est paire.

3. (a) On étudie le taux d'accroissement de f en 0.

Pour $x \neq 0$:

$$\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{f(x)}{x} = \frac{\ln(1 + x^2)}{x^2}.$$

Et, on rappelle que $\lim_{X \rightarrow 0} \frac{\ln(1 + X)}{X} = 1$ Donc

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1 + x^2)}{x^2} = 1.$$

Ainsi f est dérivable en 0 et $f'(0) = 1$.

(b) La tangente $\mathcal{T}$ à $\mathcal{C}$ en 0 a pour équation

$$y = f'(0)(x - 0) + f(0)$$

i.e.

$$y = x$$

Étudions le signe de $f(x) - x$ pour $x > 0$:

$$\begin{aligned} f(x) - x &= \frac{\ln(1 + x^2)}{x} - x \\ &= \frac{\ln(1 + x^2) - x^2}{x}. \end{aligned}$$

Posons $h(u) = \ln(1 + u) - u$ pour $u \geq 0$. On a $h'(u) = \frac{1}{1 + u} - 1 = \frac{-u}{1 + u} \leq 0$.

Donc h est décroissante sur $[0; +\infty[$, et comme $h(0) = 0$, on a $h(u) \leq 0$ pour $u \geq 0$.

Ainsi $\ln(1 + x^2) - x^2 \leq 0$, donc pour $x > 0$: $f(x) - x \leq 0$.

Pour $x < 0$, par imparité de f et de la fonction $x \mapsto x$, on a aussi $f(x) - x \leq 0$.

La courbe $\mathcal{C}$ est en dessous de sa tangente en 0.

(c) D'après ce qui précède, pour tout $t \in [0; 1]$:

$$0 \leq f(t) \leq t.$$

Par croissance de l'intégrale sur $[0; 1]$:

$$\int_0^1 0 dt \leq \int_0^1 f(t) dt \leq \int_0^1 t dt.$$

On obtient :

$$0 \leq F(1) \leq \left[\frac{t^2}{2} \right]_0^1.$$

On en conclut que

$$0 \leq F(1) \leq \frac{1}{2}$$

4. (a) Pour $t \geq 1$, on a $t^2 \geq 1$, donc :

$$t^2 \leq 1 + t^2 \leq t^2 + t^2 = 2t^2.$$

Par croissance du logarithme (les trois membres sont strictement positifs) :

$$\ln(t^2) \leq \ln(1 + t^2) \leq \ln(2t^2).$$

Pour $t \geq 1 > 0$, en divisant par t , on obtient, pour tout $t \geq 1$,

$$\frac{\ln(t^2)}{t} \leq \frac{\ln(1 + t^2)}{t} \leq \frac{\ln(2t^2)}{t}$$

(b) L'inégalité de gauche donne, pour $t \geq 1$:

$$\frac{\ln(1 + t^2)}{t} \geq \frac{\ln(t^2)}{t}.$$

i.e.

$$f(t) \geq \frac{2 \ln t}{t}$$

Par croissance de l'intégrale sur $[1; x]$ pour $x \geq 1$:

$$\int_1^x f(t) dt \geq \int_1^x \frac{2 \ln t}{t} dt$$

i.e.

$$\int_1^x f(t) dt \geq 2 \int_1^x \frac{\ln t}{t} dt$$

Or, par la relation de Chasles :

$$\begin{aligned} \int_1^x f(t) dt &= \int_0^x f(t) dt - \int_0^1 f(t) dt \\ &= F(x) - F(1) \end{aligned}$$

On en conclut que $F(x) - F(1) \geq 2 \int_1^x \frac{\ln t}{t} dt$ pour tout $x \geq 1$.

(c) La fonction $t \mapsto \frac{\ln t}{t}$ a pour primitive $t \mapsto \frac{(\ln t)^2}{2}$.

$$\begin{aligned} \int_1^x \frac{\ln t}{t} dt &= \left[\frac{(\ln t)^2}{2} \right]_1^x \\ &= \frac{(\ln x)^2}{2} - \frac{(\ln 1)^2}{2} \\ &= \frac{\ln^2(x)}{2}. \end{aligned}$$

On en conclut que

$$\int_1^x \frac{\ln t}{t} dt = \frac{\ln^2(x)}{2}$$

D'après la question précédente :

$$F(x) \geq F(1) + 2 \times \frac{\ln^2 x}{2} = F(1) + \ln^2 x.$$

Or, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln^2(x) = +\infty$.

On en conclut que

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = +\infty$$



Exercice 19

On s'intéresse dans cet exercice aux suites (S_n) définies par : $S_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^\alpha}$ où $\alpha > 0$.

1. Montrer que, pour tout entier naturel non nul k et tout $\alpha > 0$:

$$\frac{1}{(k+1)^\alpha} \leq \int_k^{k+1} \frac{1}{x^\alpha} dx \leq \frac{1}{k^\alpha}$$

2. En déduire que (S_n) converge pour $\alpha > 1$ et diverge pour $0 < \alpha \leq 1$.

Solution de l'exercice 19

1. Soit $\alpha > 0$. La fonction g définie, pour tout $x \in]0; +\infty[$, par $g(x) = \frac{1}{x^\alpha} = x^{-\alpha}$ est dérivable et :

$$g'(x) = -\alpha x^{-\alpha-1} = -\frac{\alpha}{x^{\alpha+1}} < 0.$$

Donc g est strictement décroissante sur $]0; +\infty[$.

Pour tout $x \in [k; k+1]$ (avec $k \geq 1$), on a donc :

$$g(k+1) \leq g(x) \leq g(k),$$

c'est-à-dire :

$$\frac{1}{(k+1)^\alpha} \leq \frac{1}{x^\alpha} \leq \frac{1}{k^\alpha}.$$

Par croissance de l'intégrale sur $[k; k+1]$:

$$\int_k^{k+1} \frac{1}{(k+1)^\alpha} dx \leq \int_k^{k+1} \frac{1}{x^\alpha} dx \leq \int_k^{k+1} \frac{1}{k^\alpha} dx$$

c'est-à-dire

$$\left[\frac{1}{(k+1)^\alpha x} \right]_k^{k+1} \leq \int_k^{k+1} \frac{1}{x^\alpha} dx \leq \left[\frac{1}{k^\alpha x} \right]_k^{k+1}$$

On en conclut que

$$\frac{1}{(k+1)^\alpha} \leq \int_k^{k+1} \frac{1}{x^\alpha} dx \leq \frac{1}{k^\alpha}$$

pour tout $k \geq 1$ et tout $\alpha > 0$.

2. En sommant les inégalités de la question 1 pour k allant de 1 à n :

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{(k+1)^\alpha} \leq \sum_{k=1}^n \int_k^{k+1} \frac{1}{x^\alpha} dx \leq \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^\alpha}.$$

Par la relation de Chasles :

$$\sum_{k=1}^n \int_k^{k+1} \frac{1}{x^\alpha} dx = \int_1^{n+1} \frac{1}{x^\alpha} dx.$$

De plus :

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{(k+1)^\alpha} = \sum_{j=2}^{n+1} \frac{1}{j^\alpha} = S_{n+1} - 1.$$

On obtient donc l'encadrement :

$$S_{n+1} - 1 \leq \int_1^{n+1} \frac{1}{x^\alpha} dx \leq S_n.$$

Calculons l'intégrale $\int_1^{n+1} \frac{1}{x^\alpha} dx$:

Cas $\alpha \neq 1$:

Une primitive de $x \mapsto x^{-\alpha}$ est

$$x \mapsto \frac{x^{-\alpha+1}}{-\alpha+1} = \frac{x^{1-\alpha}}{1-\alpha}$$

$$\begin{aligned} \int_1^{n+1} \frac{1}{x^\alpha} dx &= \left[\frac{x^{1-\alpha}}{1-\alpha} \right]_1^{n+1} \\ &= \frac{(n+1)^{1-\alpha} - 1}{1-\alpha}. \end{aligned}$$

Cas $\alpha = 1$:

$$\int_1^{n+1} \frac{1}{x} dx = [\ln x]_1^{n+1} = \ln(n+1).$$

Étude de la convergence selon les valeurs de α :

Cas $\alpha > 1$:

On a $1 - \alpha < 0$, donc

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (n+1)^{1-\alpha} = 0$$

Ainsi

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_1^{n+1} \frac{1}{x^\alpha} dx = \frac{1}{\alpha - 1}$$

D'après l'encadrement $S_{n+1} - 1 \leq \int_1^{n+1} \frac{1}{x^\alpha} dx \leq S_n$, on a :

$$S_n \leq 1 + \frac{1}{\alpha - 1} = \frac{\alpha}{\alpha - 1}.$$

La suite (S_n) est croissante (comme somme de termes positifs) et majorée (par $\frac{\alpha}{\alpha - 1}$). Donc, pour $\alpha > 1$, la suite (S_n) converge.

Cas $\alpha = 1$:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_1^{n+1} \frac{1}{x} dx = \lim_{n \rightarrow +\infty} \ln(n+1) = +\infty$$

D'après l'encadrement :

$$S_n \geq \int_1^{n+1} \frac{1}{x} dx = \ln(n+1).$$

Par minoration, $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = +\infty$.

Pour $\alpha = 1$, la suite (S_n) diverge vers $+\infty$.

Cas $0 < \alpha < 1$:

On a $1 - \alpha > 0$, donc

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (n+1)^{1-\alpha} = +\infty$$

Ainsi :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_1^{n+1} \frac{1}{x^\alpha} dx = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(n+1)^{1-\alpha} - 1}{1 - \alpha} = +\infty.$$

D'après l'encadrement :

$$S_n \geq \int_1^{n+1} \frac{1}{x^\alpha} dx - 1 + \frac{1}{(n+1)^\alpha}.$$

Or, $S_n \geq S_{n+1} - 1 \geq \int_1^{n+1} \frac{1}{x^\alpha} dx - 1$ et

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_1^{n+1} \frac{1}{x^\alpha} dx - 1 = +\infty.$$

Par minoration, $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = +\infty$. Pour $0 < \alpha < 1$, la suite (S_n) diverge vers $+\infty$.

Conclusion :

(S_n) converge si et seulement si $\alpha > 1$.

Exercice 20

1. Montrer que pour tout entier naturel n :

$$\frac{1}{2n+2} \leq \int_0^1 \frac{x^n}{1+x^2} dx \leq \frac{1}{n+1}$$

2. Soit f une fonction continue sur $[0; 1]$ et telle que pour tout $x \in [0; 1]$: $\int_x^1 f(t) dt \geq \frac{1-x^2}{2}$. On appelle F une primitive quelconque de f sur l'intervalle $[0; 1]$.

(a) Montrer que :

$$F(1) = \int_0^1 x f(x) dx + \int_0^1 F(x) dx$$

(b) En déduire que : $\int_0^1 x f(x) dx \geq \frac{1}{3}$.

(c) En déduire que : $\int_0^1 (f(x))^2 dx \geq \frac{1}{3}$.

Solution de l'exercice 20

1. Pour tout $x \in [0; 1]$, on a $0 \leq x^2 \leq 1$, donc :

$$1 \leq 1 + x^2 \leq 2.$$

En prenant l'inverse (les quantités sont strictement positives) :

$$\frac{1}{2} \leq \frac{1}{1+x^2} \leq 1.$$

Pour $x \in [0; 1]$, on a $x^n \geq 0$, donc en multipliant par x^n :

$$\frac{x^n}{2} \leq \frac{x^n}{1+x^2} \leq x^n.$$

Par croissance de l'intégrale sur $[0; 1]$:

$$\int_0^1 \frac{x^n}{2} dx \leq \int_0^1 \frac{x^n}{1+x^2} dx \leq \int_0^1 x^n dx$$

i.e.

$$\frac{1}{2} \times \frac{1}{n+1} \leq \int_0^1 \frac{x^n}{1+x^2} dx \leq \frac{1}{n+1}.$$

On en conclut que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\frac{1}{2n+2} \leq \int_0^1 \frac{x^n}{1+x^2} dx \leq \frac{1}{n+1}$$

2. (a) On effectue une intégration par parties avec :

- $u(x) = F(x)$, donc $u'(x) = f(x)$;
- $v'(x) = 1$, donc $v(x) = x$.

Les fonctions u et v sont dérivables et de dérivée continue, donc

$$\begin{aligned}
\int_0^1 F(x) dx &= [F(x) \times x]_0^1 - \int_0^1 f(x) \times x dx \\
&= F(1) \times 1 - F(0) \times 0 - \int_0^1 xf(x) dx \\
&= F(1) - \int_0^1 xf(x) dx.
\end{aligned}$$

En réarrangeant

$$F(1) = \int_0^1 xf(x) dx + \int_0^1 F(x) dx$$

(b) D'après l'hypothèse, pour tout $x \in [0; 1]$:

$$\int_x^1 f(t) dt \geq \frac{1-x^2}{2}.$$

Or $\int_x^1 f(t) dt = F(1) - F(x)$, donc :

$$F(1) - F(x) \geq \frac{1-x^2}{2}.$$

Ainsi :

$$F(x) \leq F(1) - \frac{1-x^2}{2}.$$

Par croissance de l'intégrale sur $[0; 1]$:

$$\begin{aligned}
\int_0^1 F(x) dx &\leq \int_0^1 \left(F(1) - \frac{1-x^2}{2} \right) dx \\
&= F(1) \times 1 - \frac{1}{2} \int_0^1 (1-x^2) dx \\
&= F(1) - \frac{1}{2} \left[x - \frac{x^3}{3} \right]_0^1 \\
&= F(1) - \frac{1}{2} \times \frac{2}{3} \\
&= F(1) - \frac{1}{3}.
\end{aligned}$$

D'après la question 2.a),

$$F(1) = \int_0^1 xf(x) dx + \int_0^1 F(x) dx$$

i.e. :

$$\int_0^1 F(x) dx = F(1) - \int_0^1 xf(x) dx.$$

En substituant dans l'inégalité :

$$\begin{aligned}
F(1) - \int_0^1 xf(x) dx &\leq F(1) - \frac{1}{3} \\
- \int_0^1 xf(x) dx &\leq -\frac{1}{3}.
\end{aligned}$$

D'où

$$\int_0^1 xf(x) dx \geq \frac{1}{3}$$

(c) On utilise l'inégalité $(f(x) - x)^2 \geq 0$, qui donne :

$$(f(x))^2 - 2xf(x) + x^2 \geq 0,$$

soit :

$$(f(x))^2 \geq 2xf(x) - x^2.$$

Par croissance de l'intégrale sur $[0; 1]$:

$$\begin{aligned}
\int_0^1 (f(x))^2 dx &\geq 2 \int_0^1 xf(x) dx - \int_0^1 x^2 dx \\
&\geq 2 \times \frac{1}{3} - \left[\frac{x^3}{3} \right]_0^1 \\
&\geq \frac{2}{3} - \frac{1}{3} \\
&\geq \frac{1}{3}.
\end{aligned}$$

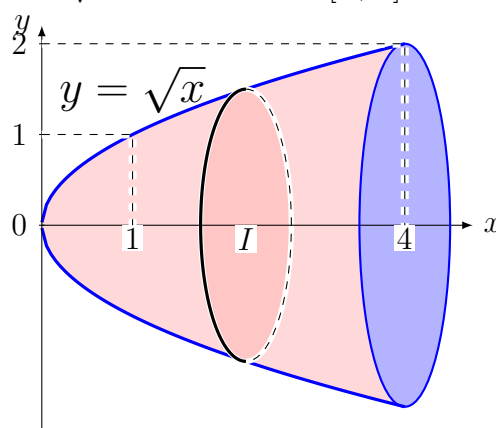
On en conclut que

$$\int_0^1 (f(x))^2 dx \geq \frac{1}{3}$$

Exercice 21

Volume du bol parabolique

Le bol parabolique ci-dessous est le solide de révolution engendré par la rotation autour de l'axe (Ox) de la courbe représentative de la fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ sur l'intervalle $[0; 4]$.



Retrouver le volume de ce bol, déjà calculé plus tôt dans l'année à l'aide de suites.

Solution de l'exercice 21 Pour un solide de révolution engendré par la rotation autour de l'axe (Ox) de la courbe d'une fonction f positive sur un intervalle $[a; b]$, le volume est donné par la formule :

$$\begin{aligned}
V &= \int_a^b \pi r^2 dx \\
&= \int_a^b \pi [f(x)]^2 dx \\
&= \pi \int_a^b [f(x)]^2 dx
\end{aligned}$$

Ici, la fonction f est définie, pour tout $x \in [0; 4]$, par $f(x) = \sqrt{x}$. On a donc $[f(x)]^2 = (\sqrt{x})^2 = x$.

Le volume du bol parabolique est alors :

$$\mathcal{V} = \pi \int_0^4 x \, dx.$$

Calculons cette intégrale. Une primitive de la fonction g définie, pour tout $x \in [0; 4]$, par $g(x) = x$ est la fonction G définie par $G(x) = \frac{x^2}{2}$.

On obtient :

$$\mathcal{V} = \pi \left[\frac{x^2}{2} \right]_0^4 = \pi \left(\frac{4^2}{2} - \frac{0^2}{2} \right) = \pi \times \frac{16}{2} = 8\pi.$$

Ainsi $\mathcal{V} = 8\pi$ unités de volume..

Remarque : Si l'unité de longueur est le centimètre, alors le volume est de $8\pi \text{ cm}^3$, soit environ $25,13 \text{ cm}^3$.

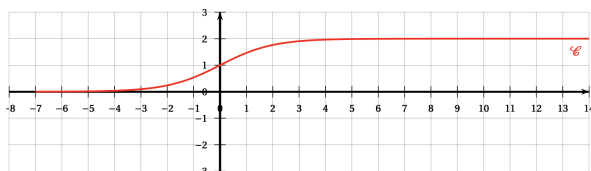
Exercice 22

D'après un exercice du baccalauréat scientifique, Métropole Septembre 2020.

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \frac{2e^x}{e^x + 1}.$$

On donne ci-dessous la courbe représentative $\mathcal{C}$ de la fonction f dans un repère orthonormé.



Solution de l'exercice 22



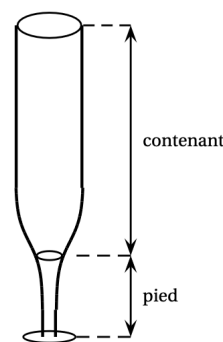
Suite de l'exercice XXIV.0

1. Calculer la limite de la fonction f en moins l'infini et interpréter graphiquement le résultat.
2. Montrer que la droite d'équation $y = 2$ est asymptote horizontale à la courbe $\mathcal{C}$.
3. Calculer $f'(x)$, et vérifier que pour tout réel x on a $f'(x) = \frac{f(x)}{e^x + 1}$.
4. Montrer que la fonction f est croissante sur $\mathbb{R}$.
5. Montrer que la courbe $\mathcal{C}$ passe par le point $I(0; 1)$ et que sa tangente en ce point a pour coefficient directeur 0,5.

Une entreprise souhaite fabriquer de façon automatisée des flûtes (verres à pied) de forme allongée de contenance 12,5 cL.

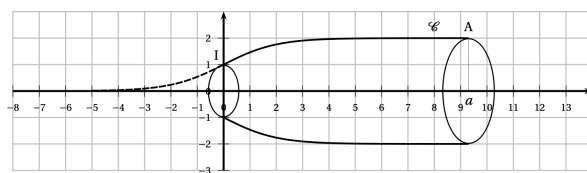
Chaque flûte est composée de deux parties comme sur l'illustration ci-contre : un pied, en verre plein, et un contenant de 12,5 cL.

À l'aide de la fonction f définie précédemment, le fabricant modélise le profil du contenant de la flûte de la manière décrite ci-dessous.



Soit A un point de $\mathcal{C}$ d'abscisse a strictement positive. La rotation autour de l'axe des abscisses appliquée à la partie de $\mathcal{C}$ limitée par les points I et A engendre une surface modélisant le contenant de la flûte en prenant pour unité 1 cm.

Ainsi x et $f(x)$ représentent des longueurs en centimètres et l'objectif de cette partie est de déterminer la valeur de a pour que le volume du contenant soit égal à 12,5 cL.



1. Vérifier, pour tout nombre réel $x \geq 0$, l'égalité :

$$(f(x))^2 = 4 \left(\frac{e^x}{e^x + 1} + \frac{-e^x}{(e^x + 1)^2} \right)$$

2. Déterminer une primitive sur $\mathbb{R}$ des fonctions :

$$g : x \mapsto \frac{e^x}{e^x + 1} \quad \text{et} \quad h : x \mapsto \frac{-e^x}{(e^x + 1)^2}$$

3. En déduire que, pour tout réel $a > 0$,

$$\mathcal{V}(a) = 4\pi \left[\ln \left(\frac{e^a + 1}{2} \right) + \frac{1}{e^a + 1} - \frac{1}{2} \right]$$

Exercice 23

D'après un exercice du baccalauréat scientifique, Septembre 2020.

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = xe^{-x^2+1}$$

On note $\mathcal{C}$ la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$

1. (a) Montrer que, pour tout x réel,

$$f(x) = \frac{e}{x} \times \frac{x^2}{e^{x^2}}$$

- (b) En déduire la limite de $f(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$.
2. Pour tout réel x , on considère les points M et N de la courbe $\mathcal{C}$ d'abscisses respectives x et $-x$.
- (a) Montrer que le point O est le milieu du segment $[MN]$.
- (b) Que peut-on en déduire pour la courbe $\mathcal{C}$?
3. Étudier les variations de la fonction f sur l'intervalle $[0; +\infty[$.
4. (a) Montrer que l'équation $f(x) = 0,5$ admet sur $[0; +\infty[$ exactement deux solutions notées α et β (avec $\alpha < \beta$).
- (b) En déduire les solutions sur $[0; +\infty[$ de l'inéquation $f(x) \geq 0,5$.
- (c) Donner une valeur approchée à 10^{-2} près de α et β .
5. Soit A un réel strictement positif.

On pose

$$I_A = \int_0^A f(x) dx$$

- (a) Justifier que $I_A = \frac{1}{2} (e - e^{-A^2+1})$.
- (b) Calculer la limite de I_A lorsque A tend vers $+\infty$.

On admet que cette limite est l'aire en unités d'aire du domaine situé entre la partie de la courbe $\mathcal{C}$ sur $[0; +\infty[$ et l'axe des abscisses.



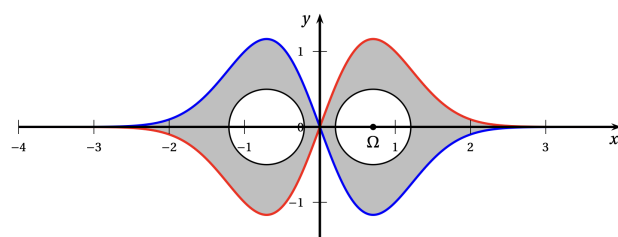
Suite de l'exercice XXIV.0

6. Comme illustré sur le graphique ci-dessous, on s'intéresse à la partie grisée du plan qui est délimitée par :

- la courbe $\mathcal{C}$ sur $\mathbb{R}$ et la courbe $\mathcal{C}'$ symétrique de $\mathcal{C}$ par rapport à l'axe des abscisses ;
- le cercle de centre $\Omega \left(\frac{\sqrt{2}}{2}; 0 \right)$ et de rayon 0,5 et son symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.

On admet que le disque de centre $\Omega \left(\frac{\sqrt{2}}{2}; 0 \right)$ et de rayon 0,5 et son symétrique par rapport à l'axe des ordonnées sont situés entièrement entre la courbe $\mathcal{C}$ et la courbe $\mathcal{C}'$.

Déterminer une valeur approchée en unité d'aire au centième près de l'aire de cette partie grisée du plan.



Exercice 24

D'après un exercice du baccalauréat ES, Centres étrangers, juin 2014.

Partie A : Étude d'une fonction

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = xe^{x^2-1}$$

$\mathcal{C}_f$ est la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthonormé du plan. On note f' la fonction dérivée de f et f'' la fonction dérivée seconde de f .

1. (a) Montrer que, pour tout réel x ,

$$f'(x) = (2x^2 + 1)e^{x^2-1}$$

- (b) En déduire le sens de variation de f sur $\mathbb{R}$.

2. On admet que, pour tout réel x ,

$$f''(x) = 2x(2x^2 + 3)e^{x^2-1}$$

Déterminer, en justifiant, le plus grand intervalle sur lequel la fonction f est convexe.

3. Soit h la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$h(x) = x(1 - e^{x^2-1})$$

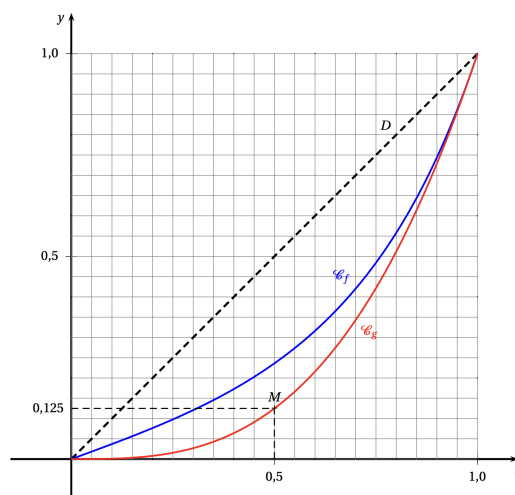
- (a) Justifier que l'inéquation $1 - e^{x^2-1} \geq 0$ a pour ensemble de solutions $[-1 ; 1]$.
- (b) Déterminer le signe de $h(x)$ sur $[-1 ; 1]$.
- (c) En remarquant que, pour tout réel x , on a l'égalité $h(x) = x - f(x)$, déduire de la question précédente la position relative de la courbe $\mathcal{C}_f$ et de la droite D d'équation $y = x$ sur l'intervalle $[0 ; 1]$.
4. Soit H la fonction définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ par $H(x) = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}e^{x^2-1}$ et soit $I = \int_0^1 h(x) dx$.
On admet que H est une primitive de la fonction h sur $\mathbb{R}$. Calculer la valeur exacte de I .

Partie B : Applications

Sur le graphique suivant, sont tracées sur l'intervalle $[0 ; 1]$:

- la courbe $\mathcal{C}_f$ représentative de la fonction étudiée en partie A ;
- la courbe $\mathcal{C}_g$ représentative de la fonction définie par $g(x) = x^3$;
- la droite D d'équation $y = x$.

Suite de l'exercice XXIV.0



Les courbes $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$ illustrent ici la répartition des salaires dans deux entreprises F et G :

- sur l'axe des abscisses, x représente la proportion des employés ayant les salaires les plus faibles par rapport à l'effectif total de l'entreprise ;
- sur l'axe des ordonnées, $f(x)$ et $g(x)$ représentent pour chaque entreprise la proportion de la masse salariale (i.e. la somme de tous les salaires) correspondante.

Par exemple :

Le point $M(0,5 ; 0,125)$ est un point appartenant à la courbe $\mathcal{C}_g$. Pour l'entreprise G, cela se traduit de la façon suivante :

si on classe les employés par revenu croissant, le total des salaires de la première moitié (c'est-à-dire des 50 % aux revenus les plus faibles) représente 12,5 % de la masse salariale.

1. Calculer le pourcentage de la masse salariale détenue par 80 % des employés ayant les salaires les plus faibles dans l'entreprise F. On donnera une valeur du résultat arrondie à l'unité.
2. On note $\mathcal{A}_f$ l'aire du domaine délimité par la droite D , la courbe $\mathcal{C}_f$ et les droites d'équations $x = 0$ et $x = 1$.

On appelle **indice de Gini** associé à f , le nombre réel noté I_f et défini par $I_f = 2 \times \mathcal{A}_f$.

- (a) Montrer que $I_f = \frac{1}{e}$.

- (b) On admet que, plus l'indice de Gini est petit, plus la répartition des salaires dans l'entreprise est égalitaire. Déterminer, en justifiant, l'entreprise pour laquelle la distribution des salaires est la plus égalitaire.



