

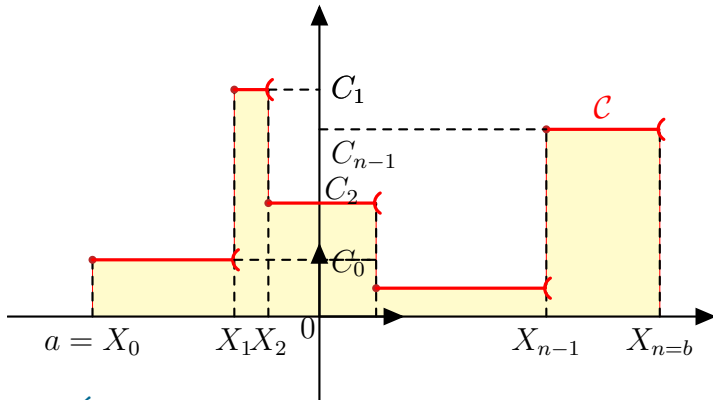
Calcul intégral

1. Introduction

A. Cas d'une fonction positive en escalier

On considère d'abord une fonction f définie sur un intervalle $[a; b]$ de la manière suivante :

- Il existe une suite strictement croissante $x_0, x_1, x_2, \dots, x_n$ avec $x_0 = a$ et $x_n = b$.
- Il existe une suite de réels positifs $c_0, c_1, c_2, \dots, c_{n-1}$ telle que pour tout $k \in \llbracket 0; n-1 \rrbracket$ et tout $x \in [x_k; x_{k+1}[$, $f(x) = c_k$



■ DÉFINITION :

Une telle fonction s'appelle une **fonction en escalier**.

Si l'on note $\mathcal{C}$ la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthogonal $(O; \vec{i}, \vec{j})$, alors l'aire de la surface comprise entre l'axe des abscisses, la courbe $\mathcal{C}$, les droites d'équation $x = a$ et $x = b$ est le nombre positif $\mathcal{A}$ tel que :

$$\begin{aligned} \mathcal{A} &= c_0(x_1 - x_0) + c_1(x_2 - x_1) + \dots + c_{n-1}(x_n - x_{n-1}) \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} c_k(x_{k+1} - x_k) \end{aligned}$$

■ DÉFINITION :

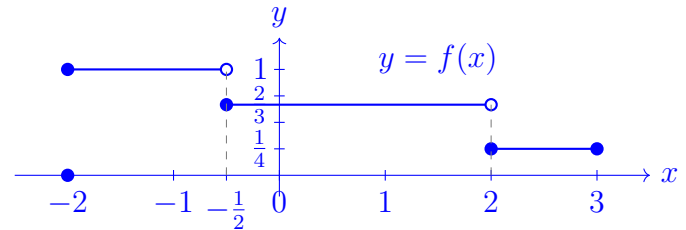
Ce nombre $\mathcal{A}$ s'appelle l'**intégrale** de la fonction f sur l'intervalle $[a; b]$ et se note $\int_a^b f(x) dx$.

Exemple :

Soit f la fonction en escalier définie sur l'intervalle $[-2; 3]$ par :

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } -2 \leq x < -\frac{1}{2} \\ \frac{2}{3} & \text{si } -\frac{1}{2} \leq x < 2 \\ \frac{1}{4} & \text{si } 2 \leq x \leq 3 \end{cases}$$

Calculer $\int_{-2}^3 f(x) dx$.



D'après la définition donnée, nous identifions :

- La suite strictement croissante :
 $x_0 = -2, x_1 = -\frac{1}{2}, x_2 = 2, x_3 = 3$
- La suite des valeurs : $c_0 = 1, c_1 = \frac{2}{3}, c_2 = \frac{1}{4}$

L'intégrale de f sur $[-2; 3]$ est donnée par :

$$\begin{aligned} \int_{-2}^3 f(x) dx &= \sum_{k=0}^{n-1} c_k(x_{k+1} - x_k) \\ &= c_0(x_1 - x_0) + c_1(x_2 - x_1) + c_2(x_3 - x_2) \\ &= 1 \times \left(-\frac{1}{2} - (-2)\right) + \frac{2}{3} \times \left(2 - \left(-\frac{1}{2}\right)\right) \\ &\quad + \frac{1}{4} \times (3 - 2) \\ &= 1 \times \frac{3}{2} + \frac{2}{3} \times \frac{5}{2} + \frac{1}{4} \times 1 \\ &= \frac{3}{2} + \frac{5}{3} + \frac{1}{4} \\ &= \frac{18}{12} + \frac{20}{12} + \frac{3}{12} \\ &= \frac{18 + 20 + 3}{12} \\ &= \frac{41}{12} \end{aligned}$$

Réponse : $\int_{-2}^3 f(x) dx = \frac{41}{12}$

B. Cas d'une fonction continue et positive sur un segment

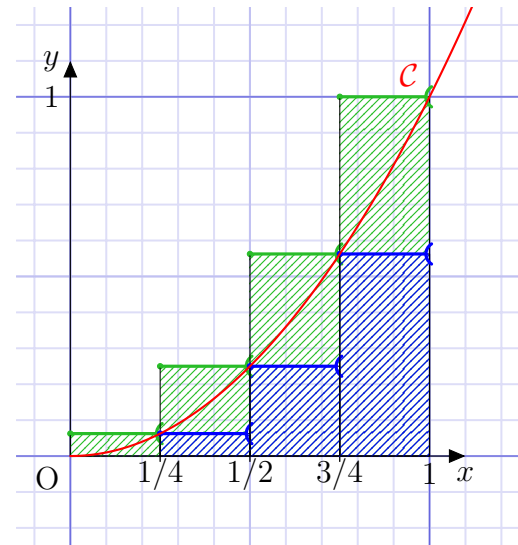
Exemple :

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $[0; 1]$ par : $f(x) = x^2$ et sa courbe représentative $\mathcal{C}$ dans un repère orthogonal $(O; \vec{i}, \vec{j})$. On se propose de calculer l'aire de la surface comprise entre la courbe $\mathcal{C}$, l'axe des abscisses, les droites d'équation $x = 0$ et $x = 1$, que nous allons noter $\mathcal{A}$.

Ce nombre $\mathcal{A}$ est l'intégrale de la fonction carré sur l'intervalle $[0; 1]$ et se note aussi comme précédemment : $\int_0^1 x^2 dx$.

1. Pour approcher $\mathcal{A} = \int_0^1 x^2 dx$, commençons par partager l'intervalle $[0; 1]$ en quatre intervalles de même amplitude $\frac{1}{4}$.

La somme des aires des rectangles hachurés en bleu est inférieure à $\mathcal{A}$ et la somme des aires des rectangles en vert et bleu est supérieure à $\mathcal{A}$.



En déduire que : $\frac{7}{32} \leq \mathcal{A} \leq \frac{15}{32}$.

La largeur d'un rectangle hachuré est $\frac{1}{4}$ et la longueur est $f(x) = x^2$, donc,

- sur l'intervalle $\left[0; \frac{1}{4}\right]$, l'aire hachurée est nulle.
- sur l'intervalle $\left[\frac{1}{4}; \frac{1}{2}\right]$, l'aire hachurée est $\frac{1}{4} \times f\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{1}{4} \times \left(\frac{1}{4}\right)^2 = \frac{1}{4} \times \frac{1}{16} = \frac{1}{64}$
- sur l'intervalle $\left[\frac{1}{2}; \frac{3}{4}\right]$, l'aire hachurée est $\frac{1}{4} \times f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4} \times \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{16}$
- sur l'intervalle $\left[\frac{3}{4}; 1\right]$, l'aire hachurée est $\frac{1}{4} \times f\left(\frac{3}{4}\right) = \frac{1}{4} \times \left(\frac{3}{4}\right)^2 = \frac{1}{4} \times \frac{9}{16} = \frac{9}{64}$

Ainsi l'aire total hachurée est

$$0 + \frac{1}{64} + \frac{1}{16} + \frac{9}{64} = 0 + \frac{1}{64} + \frac{4}{64} + \frac{9}{64} = \frac{14}{64} = \frac{7}{32}$$

Par un raisonnement analogue,

- sur l'intervalle $\left[0; \frac{1}{4}\right]$, l'aire grisée est $\frac{1}{4} \times f\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{1}{4} \times \left(\frac{1}{4}\right)^2 = \frac{1}{4} \times \frac{1}{16} = \frac{1}{64}$
- sur l'intervalle $\left[\frac{1}{4}; \frac{1}{2}\right]$, l'aire grisée est $\frac{1}{4} \times f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4} \times \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{16}$
- sur l'intervalle $\left[\frac{1}{2}; \frac{3}{4}\right]$, l'aire grisée est $\frac{1}{4} \times f\left(\frac{3}{4}\right) = \frac{1}{4} \times \left(\frac{3}{4}\right)^2 = \frac{1}{4} \times \frac{9}{16} = \frac{9}{64}$
- sur l'intervalle $\left[\frac{3}{4}; 1\right]$, l'aire hachurée est $\frac{1}{4} \times f(1) = \frac{1}{4} \times 1^2 = \frac{1}{4}$

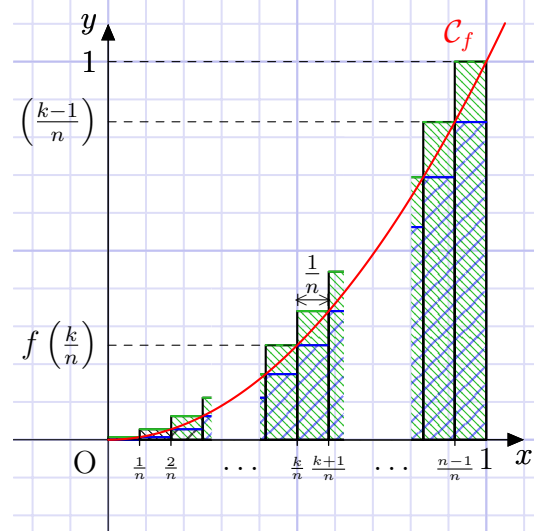
Ainsi l'aire total hachurée est

$$\frac{1}{64} + \frac{1}{16} + \frac{9}{64} + \frac{1}{4} = \frac{1}{64} + \frac{4}{64} + \frac{9}{64} + \frac{16}{64} = \frac{30}{64} = \frac{15}{32}$$

On en conclut que

$$\frac{7}{32} \leq \mathcal{A} \leq \frac{15}{32}$$

2. On va maintenant généraliser ce procédé. n étant un entier supérieur ou égal à 1, on divise l'intervalle $[0 ; 1]$ en n intervalles de même amplitude $\frac{1}{n}$.



a) Montrer que

$$\frac{1}{n} \left(\frac{1}{n}\right)^2 + \frac{1}{n} \left(\frac{2}{n}\right)^2 + \dots + \frac{1}{n} \left(\frac{n-1}{n}\right)^2 \leq \mathcal{A} \leq \frac{1}{n} \left(\frac{1}{n}\right)^2 + \frac{1}{n} \left(\frac{2}{n}\right)^2 + \dots + \frac{1}{n} \left(\frac{n-1}{n}\right)^2 + \frac{1}{n} \left(\frac{n}{n}\right)^2$$

On divise l'intervalle $[0 ; 1]$ en n intervalles de même amplitude $\frac{1}{n}$. Les intervalles sont :

$$\left[0 ; \frac{1}{n}\right], \left[\frac{1}{n} ; \frac{2}{n}\right], \left[\frac{2}{n} ; \frac{3}{n}\right], \dots, \left[\frac{n-1}{n} ; 1\right]$$

Pour obtenir une approximation par défaut de $\mathcal{A}$ (minoration), on prend sur chaque intervalle la hauteur du rectangle égale à la valeur de f au début de l'intervalle :

- Sur $\left[0 ; \frac{1}{n}\right]$: aire = $\frac{1}{n} \times f(0) = \frac{1}{n} \times 0 = 0$
- Sur $\left[\frac{1}{n} ; \frac{2}{n}\right]$: aire = $\frac{1}{n} \times f\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n} \times \left(\frac{1}{n}\right)^2$
- $\vdots$
- Sur $\left[\frac{n-1}{n} ; 1\right]$: aire = $\frac{1}{n} \times f\left(\frac{n-1}{n}\right) = \frac{1}{n} \times \left(\frac{n-1}{n}\right)^2$

La somme de ces aires donne une minoration de $\mathcal{A}$:

$$0 + \frac{1}{n} \left(\frac{1}{n}\right)^2 + \frac{1}{n} \left(\frac{2}{n}\right)^2 + \dots + \frac{1}{n} \left(\frac{n-1}{n}\right)^2 \leq \mathcal{A}$$

Pour obtenir une approximation par excès de $\mathcal{A}$ (majoration), on prend sur chaque intervalle la hauteur du rectangle égale à la valeur de f à la fin de l'intervalle :

- Sur $\left[0 ; \frac{1}{n}\right]$: aire = $\frac{1}{n} \times f\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n} \times \left(\frac{1}{n}\right)^2$
- Sur $\left[\frac{1}{n} ; \frac{2}{n}\right]$: aire = $\frac{1}{n} \times f\left(\frac{2}{n}\right) = \frac{1}{n} \times \left(\frac{2}{n}\right)^2$
- $\vdots$
- Sur $\left[\frac{n-1}{n} ; 1\right]$: aire = $\frac{1}{n} \times f(1) = \frac{1}{n} \times 1^2 = \frac{1}{n}$

La somme de ces aires donne une majoration de $\mathcal{A}$:

$$\mathcal{A} \leq \frac{1}{n} \left(\frac{1}{n}\right)^2 + \frac{1}{n} \left(\frac{2}{n}\right)^2 + \dots + \frac{1}{n} \left(\frac{n-1}{n}\right)^2 + \frac{1}{n} \left(\frac{n}{n}\right)^2$$

D'où l'encadrement demandé.

b) En déduire que

$$\frac{1}{n^3} [1^2 + 2^2 + \dots + (n-1)^2] \leq \mathcal{A} \leq \frac{1}{n^3} [1^2 + 2^2 + \dots + (n-1)^2 + n^2]$$

À partir de l'encadrement précédent, factorisons par $\frac{1}{n}$:

Pour la minoration :

$$\begin{aligned} \frac{1}{n} \left(\frac{1}{n}\right)^2 + \frac{1}{n} \left(\frac{2}{n}\right)^2 + \dots + \frac{1}{n} \left(\frac{n-1}{n}\right)^2 &= \frac{1}{n} \times \frac{1^2}{n^2} + \frac{1}{n} \times \frac{2^2}{n^2} + \dots + \frac{1}{n} \times \frac{(n-1)^2}{n^2} \\ &= \frac{1}{n^3} [1^2 + 2^2 + \dots + (n-1)^2] \end{aligned}$$

Pour la majoration :

$$\frac{1}{n} \left(\frac{1}{n}\right)^2 + \frac{1}{n} \left(\frac{2}{n}\right)^2 + \dots + \frac{1}{n} \left(\frac{n-1}{n}\right)^2 + \frac{1}{n} \left(\frac{n}{n}\right)^2 = \frac{1}{n^3} [1^2 + 2^2 + \dots + (n-1)^2 + n^2]$$

D'où l'encadrement :

$$\frac{1}{n^3} [1^2 + 2^2 + \dots + (n-1)^2] \leq \mathcal{A} \leq \frac{1}{n^3} [1^2 + 2^2 + \dots + (n-1)^2 + n^2]$$

c) On rappelle que, pour tout entier naturel n , $1^2 + 2^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

En déduire que

$$\frac{(n-1)n(2n-1)}{6n^3} \leq \mathcal{A} \leq \frac{n(n+1)(2n+1)}{6n^3}$$

Pour la majoration, on a directement, d'après la formule rappelée :

$$\begin{aligned} \frac{1}{n^3} [1^2 + 2^2 + \dots + (n-1)^2 + n^2] &= \frac{1}{n^3} \times \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \\ &= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6n^3} \end{aligned}$$

Pour la minoration, adaptons la formule :

$$\begin{aligned} 1^2 + 2^2 + \dots + (n-1)^2 &= \frac{(n-1)(n)(2(n-1)+1)}{6} \\ &= \frac{(n-1)n(2n-1)}{6} \end{aligned}$$

D'où

$$\begin{aligned} \frac{1}{n^3} [1^2 + 2^2 + \dots + (n-1)^2] &= \frac{1}{n^3} \times \frac{n(n-1)(2n-1)}{6} \\ &= \frac{(n-1)n(2n-1)}{6n^3} \end{aligned}$$

On en conclut que

$$\frac{(n-1)n(2n-1)}{6n^3} \leq \mathcal{A} \leq \frac{n(n+1)(2n+1)}{6n^3}$$

d) En déduire que

$$\frac{2n^3 - 3n^2 + n}{6n^3} \leq \mathcal{A} \leq \frac{2n^3 + 3n^2 + n}{6n^3}$$

Développons les numérateurs :

Pour la minoration :

$$\begin{aligned}(n-1)n(2n-1) &= n(n-1)(2n-1) \\ &= n(2n^2 - n - 2n + 1) \\ &= n(2n^2 - 3n + 1) \\ &= 2n^3 - 3n^2 + n\end{aligned}$$

Pour la majoration :

$$\begin{aligned}n(n+1)(2n+1) &= n(2n^2 + n + 2n + 1) \\ &= n(2n^2 + 3n + 1) \\ &= 2n^3 + 3n^2 + n\end{aligned}$$

D'où :

$$\frac{2n^3 - 3n^2 + n}{6n^3} \leq \mathcal{A} \leq \frac{2n^3 + 3n^2 + n}{6n^3}$$

e) En déduire la valeur de $\mathcal{A}$.

On sait que :

- $\frac{2n^3 - 3n^2 + n}{6n^3} \leq \mathcal{A} \leq \frac{2n^3 + 3n^2 + n}{6n^3}$
- $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2n^3 - 3n^2 + n}{6n^3} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$
- $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2n^2 - 3n + 1}{6n^2} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$

Grâce au théorème d'encadrement (théorème des gendarmes), on en déduit que :

$$\mathcal{A} = \frac{1}{3}$$

Ainsi

$$\int_0^1 x^2 dx = \frac{1}{3}$$

Remarque : Les suites de termes généraux respectifs $\frac{(n-1)(2n-1)}{6n^2}$ et $\frac{n(2n+1)}{6n^2}$ sont deux suites adjacentes dont la limite commune est $\int_0^1 x^2 dx$.

Nous allons admettre que l'on peut généraliser ce procédé à toute fonction continue et positive sur un intervalle $[a; b]$. Plus précisément :

La fonction f étant continue et positive sur l'intervalle $[a; b]$, on admet qu'il existe une suite de fonctions en escalier $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(g_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telles que :

- $\forall n \in \mathbb{N} \text{ et } \forall x \in [a; b] : f_n(x) \leq f(x) \leq g_n(x)$.
- Les suites de réels $\left(\int_a^b f_n(x) dx \right)_{n \in \mathbb{N}}$ et $\left(\int_a^b g_n(x) dx \right)_{n \in \mathbb{N}}$ sont adjacentes et de limite commune l'aire de la surface comprise entre la courbe $\mathcal{C}$, l'axe des abscisses, les droites d'équation $x = a$ et $x = b$.

Cette aire est notée : $\int_a^b f(x) dx$.

Remarque : Cette méthode, appelée « méthode des rectangles », a été mise au point par Bernhard Riemann^[1].

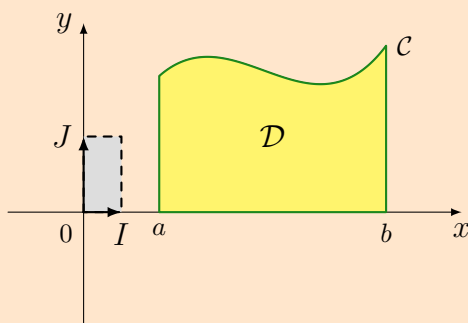
■ DÉFINITION :

Soit f une fonction continue et positive sur un intervalle $[a; b]$. Soit $\mathcal{C}$ la courbe représentative de la fonction f dans un repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$ orthogonal. Soit $\mathcal{D}$ l'ensemble des points $M(x; y)$ du plan

vérifiant : $\begin{cases} a \leq x \leq b \\ 0 \leq y \leq f(x) \end{cases}$

Autrement dit, $\mathcal{D}$ est la surface limitée par la courbe $\mathcal{C}$, l'axe des abscisses, les droites d'équation $x = a$ et $x = b$.

On appelle **unité d'aire**, notée u.a. l'aire du rectangle défini par le point O et les points $I(1; 0)$ et $J(0; 1)$.



■ DÉFINITION :

L'**intégrale** de la fonction f sur l'intervalle $[a; b]$ est l'aire du domaine $\mathcal{D}$, exprimée en unités d'aire.

On note cette intégrale : $\int_a^b f(x) dx$

1. Georg Friedrich Bernhard Riemann, (1826-1866) est un mathématicien allemand. Il a apporté de nombreuses contributions importantes à la topologie, l'analyse, la géométrie différentielle et au calcul, certaines d'entre elles ayant permis par la suite le développement de la relativité générale.

Exemple :

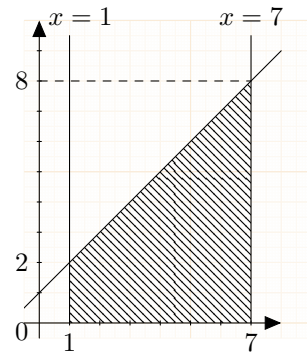
Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x + 1$.

La fonction est représentée ainsi :

On cherche à calculer

$$\mathcal{A} = \int_1^7 f(x) dx$$

$\mathcal{A}$ est la somme des aires du rectangle de largeur 2 et de longueur 7 et du triangle rectangle restant.



$$\mathcal{A} = 6 \times 2 + \frac{1}{2} \times 6 \times 6 = 30. \text{ D'où } \mathcal{A} = 30 \text{ u.a.}$$

Si l'unité de longueur est un grand carreau, soit 0,8 cm, alors $\mathcal{A} = 30 \times 0,64 \text{ cm}^2 = 19,2 \text{ cm}^2$.

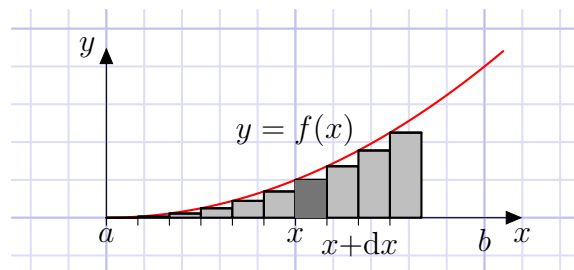
$$\text{On écrit } \int_1^7 f(x) dx = \int_1^7 (x + 1) dx = 30.$$

Remarques :

1. Pourquoi cette notation $\int_a^b f(x) dx$?

Historiquement, l'idée est celle du découpage « en tranches » de la surface considérée, comme on l'a mis en œuvre pour le calcul de $\int_0^1 x^2 dx$.

Lorsque la largeur de chaque rectangle à l'abscisse x est infiniment petite, sa largeur se note dx . La hauteur de ce rectangle peut alors être considérée comme constante et son aire est alors $f(x)dx$.



Il reste à ajouter les aires de tous les rectangles, de $x = a$ à $x = b$. Le symbole $\int$ est un S et signifie somme : d'où la notation $\int_a^b f(x) dx$: somme de a à b des $f(x)dx$.

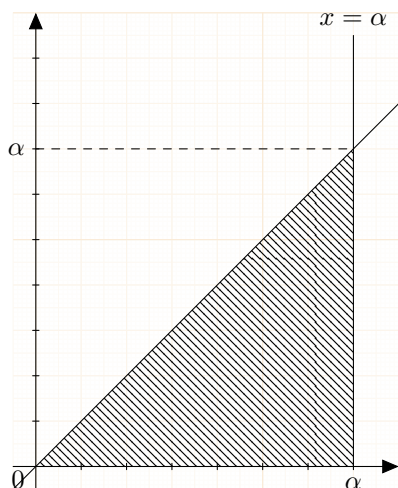
2. Lorsque le domaine $\mathcal{D}$ n'est pas formé de rectangles ou de triangles, comment peut-on calculer son aire ? L'exemple du calcul de $\int_0^1 x^2 dx$ montre que cela peut être très fastidieux. La seconde partie de ce chapitre va fournir un puissant moyen de calcul.

2. Intégrale et primitive

A. Calcul de l'intégrale d'une fonction positive

Exemple : Calcul de $\int_0^\alpha x \, dx$

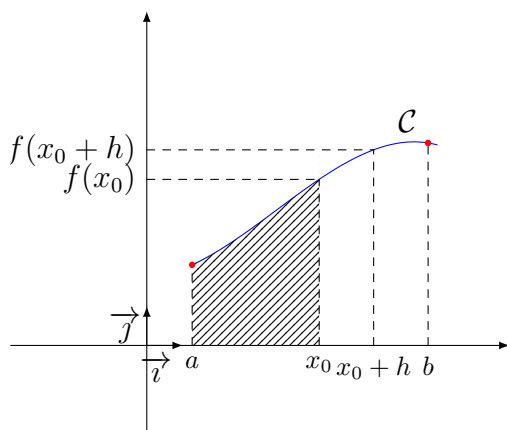
Pour α un réel quelconque, on cherche $\int_0^\alpha x \, dx$.



On calcule l'aire $\mathcal{A}$, qui est l'aire d'un triangle rectangle isocèle. On obtient

$$\int_0^\alpha x \, dx = \frac{1}{2}\alpha^2$$

On considère une fonction f positive et continue sur l'intervalle $[a; b]$. On suppose de plus pour simplifier le raisonnement, que la fonction f est croissante sur l'intervalle $[a; b]$. On note $\mathcal{C}$ sa courbe représentative dans un repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$ orthogonal.



On définit la fonction $\mathcal{A}$ sur l'intervalle $[a; b]$ par : $A(x_0)$ = aire de la surface comprise entre la courbe $\mathcal{C}$, l'axe des abscisses, les droites d'équation $x = a$ et $x = x_0$, c'est-à-dire :

$$\forall x_0 \in [a; b], A(x_0) = \int_a^{x_0} f(x) \, dx$$

Soit x_0 un réel quelconque fixé dans l'intervalle $[a; b]$.

1. Comment s'exprime l'aire de la surface grisée sur le graphique précédent ? La surface grisée correspond à l'aire comprise entre la courbe $\mathcal{C}$, l'axe des abscisses, les droites d'équation $x = x_0$ et $x = x_0 + h$. Cette aire s'exprime donc par : $A(x_0 + h) - A(x_0)$.

Que vaut $A(a)$? $A(a) = \int_a^a f(x) \, dx = 0$ car l'intégrale d'une fonction sur un intervalle de longueur nulle est égale à zéro.

2. Soit $h > 0$ tel que $x_0 + h$ soit dans l'intervalle $[a; b]$. Que représente $A(x_0 + h) - A(x_0)$ sur le graphique ? $A(x_0 + h) - A(x_0)$ représente l'aire de la surface comprise entre la courbe $\mathcal{C}$, l'axe des abscisses, et les droites d'équation $x = x_0$ et $x = x_0 + h$. C'est exactement la surface grisée sur le graphique.

Par des arguments graphiques, justifier l'encadrement :

$$h \times f(x_0) \leq A(x_0 + h) - A(x_0) \leq h \times f(x_0 + h)$$

Puisque f est croissante,

$$f(x_0) \leq f(x) \leq f(x_0 + h)$$

pour tout $x \in [x_0; x_0 + h]$.

L'aire $A(x_0 + h) - A(x_0)$ est comprise entre :

- L'aire du rectangle de base h et de hauteur $f(x_0)$, soit $h \times f(x_0)$ (rectangle inscrit sous la courbe)
- L'aire du rectangle de base h et de hauteur $f(x_0 + h)$, soit $h \times f(x_0 + h)$ (rectangle circonscrit à la courbe)

D'où l'encadrement

$$h \times f(x_0) \leq A(x_0 + h) - A(x_0) \leq h \times f(x_0 + h)$$

3. En déduire : $\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{A(x_0 + h) - A(x_0)}{h} = f(x_0)$.

En divisant l'encadrement précédent par $h > 0$, on obtient :

$$f(x_0) \leq \frac{A(x_0 + h) - A(x_0)}{h} \leq f(x_0 + h)$$

Lorsque h tend vers 0^+ , par continuité de f en x_0 , on a

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} f(x_0 + h) = f(x_0)$$

Grâce au théorème des gendarmes, on en déduit :

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{A(x_0 + h) - A(x_0)}{h} = f(x_0)$$

4. Soit $h < 0$. Écrire un encadrement de $A(x_0) - A(x_0 + h)$ et en déduire

$$\lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{A(x_0 + h) - A(x_0)}{h} = f(x_0)$$

Pour $h < 0$, on a $x_0 + h < x_0$. Puisque f est croissante pour tout $x \in [x_0 + h; x_0]$:

$$f(x_0 + h) \leq f(x) \leq f(x_0)$$

L'aire $A(x_0) - A(x_0 + h)$ (qui est bien positive) est encadrée par :

$$(-h) \times f(x_0 + h) \leq A(x_0) - A(x_0 + h) \leq (-h) \times f(x_0)$$

En divisant par $-h > 0$ et en inversant le sens des inégalités :

$$f(x_0) \leq \frac{A(x_0) - A(x_0 + h)}{-h} \leq f(x_0 + h)$$

Soit :

$$f(x_0 + h) \leq \frac{A(x_0 + h) - A(x_0)}{h} \leq f(x_0)$$

Quand h tend vers 0^- , par continuité de f , on a

$$\lim_{h \rightarrow 0^-} f(x_0 + h) = f(x_0)$$

Grâce au théorème des gendarmes :

$$\lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{A(x_0 + h) - A(x_0)}{h} = f(x_0)$$

5. En déduire que la fonction A est une fonction dérivable sur l'intervalle $[a; b]$ et donner sa fonction dérivée.

Puisque les limites à droite et à gauche de $\frac{A(x_0 + h) - A(x_0)}{h}$ quand h tend vers 0 existent et sont égales à $f(x_0)$, la fonction A est dérivable en x_0 et $A'(x_0) = f(x_0)$. Ceci étant vrai pour tout $x_0 \in [a; b]$, la fonction A est dérivable sur $[a; b]$ et $A'(x) = f(x)$ pour tout $x \in [a; b]$.

Que représente alors la fonction A pour la fonction f sur l'intervalle $[a; b]$?

La fonction A est une primitive de la fonction f sur l'intervalle $[a; b]$. Plus précisément, c'est la primitive de f qui s'annule en a .

Bilan :

1. La fonction qui à $x_0 \in [a; b]$ associe l'aire de la surface comprise entre $\mathcal{C}$, l'axe des abscisses, les droites d'équations $x = a$ et $x = x_0$, c'est-à-dire la fonction $t \mapsto \int_a^t f(x) dx$, est dérivable sur $[a; b]$, de nombre dérivée en f .

Autrement dit, la fonction définie sur $[a; b]$ par :

$A(t) = \int_a^t f(x) dx$ est une primitive sur $[a; b]$ de la fonction f et comme de plus $A(a) = 0$, on a montré en fait que la fonction A est la primitive de la fonction f sur l'intervalle $[a; b]$ qui s'annule en a .

2. Soit maintenant F une primitive quelconque de la fonction f sur l'intervalle $[a; b]$. D'après ce qui précède, la fonction $A : t \mapsto \int_a^t f(x) dx$ est également une primitive de la fonction f sur $[a; b]$, donc il existe un réel C tel que pour tout $t \in [a; b]$, $A(t) = F(t) + C$.

En particulier : $A(a) = F(a) + C$

et donc $C = -F(a)$.

On en déduit que, pour tout $t \in [a; b]$,

$A(t) = F(t) - F(a)$ et donc en particulier :

$$A(b) = F(b) - F(a)$$

qui peut aussi être écrit sous la forme :

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$$

où F est une primitive quelconque sur $[a; b]$ de la fonction f . Cette formule fournit une méthode pratique de calcul de l'intégrale $\int_a^b f(x) dx$.

Remarque : La démonstration précédente se place dans le contexte d'une fonction f continue, positive et croissante sur l'intervalle $[a; b]$ (avec $a \leq b$).

Or, du moment que la fonction f admet une primitive sur l'intervalle $[a; b]$, le calcul de $F(b) - F(a)$ a un sens, y compris si $a > b$.

Ainsi, sous la seule hypothèse de continuité de la fonction f sur l'intervalle $[a; b]$, la fonction f admet une primitive F sur l'intervalle $[a; b]$ et le nombre $\int_a^b f(x) dx$ sera alors simplement défini par :

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a).$$

Cette intégrale représente l'aire comprise entre la courbe représentative de la fonction f , l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = a$ et $x = b$ (avec $a \geq b$) si et seulement si la fonction f est continue et positive sur l'intervalle $[a; b]$.

On retiendra en conclusion :

■ **THÉORÈME** : Théorème fondamental de l'analyse

Soit f une fonction continue sur un intervalle I et $a \in I$. La fonction F définie sur l'intervalle I par :

$$F(x) = \int_a^x f(t) dt$$

est l'unique primitive de la fonction f sur I s'annulant en a .

Remarque : Ce théorème est dû à Isaac Newton (1642-1727) et Gottfried-Wilhelm Leibniz (1646-1716)

■ **THÉORÈME** :

Soit f une fonction continue sur un intervalle I et $a \in I$. Pour tout couple $(a; b) \in \mathbb{R}^2$,

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$$

où F est une primitive quelconque de la fonction f sur l'intervalle I .

Remarque : Il est commode en pratique d'utiliser la notation suivante :

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x) dx &= [F(x)]_a^b \\ &= F(b) - F(a) \end{aligned}$$

Par exemple, on présentera les calculs de la sorte :

$$\int_0^1 x^2 dx = \left[\frac{x^3}{3} \right]_0^1 = \frac{1^3}{3} - \frac{0^3}{3} = \frac{1}{3}$$

Exemples :

1. À l'aide du résultat précédent, retrouver l'aire de la surface comprise entre la courbe représentative de la fonction carré, l'axe des abscisses, les droites d'équation $x = 0$ et $x = 1$ calculée précédemment.

L'aire cherchée correspond à l'intégrale $\int_0^1 x^2 dx$.

Une primitive de $f : x \mapsto x^2$ est $F : x \mapsto \frac{x^3}{3}$.
Donc

$$\int_0^1 x^2 dx = \left[\frac{x^3}{3} \right]_0^1 = \frac{1^3}{3} - \frac{0^3}{3} = \frac{1}{3}$$

L'aire de la surface est donc $\frac{1}{3}$ unité d'aire.

2. Calculer : $\int_0^{10} (x - 4) dx$.

Une primitive de $f : x \mapsto x - 4$ est $F : x \mapsto \frac{x^2}{2} - 4x$. Donc

$$\begin{aligned} \int_0^{10} (x - 4) dx &= \left[\frac{x^2}{2} - 4x \right]_0^{10} \\ &= \left(\frac{10^2}{2} - 4 \times 10 \right) - \left(\frac{0^2}{2} - 4 \times 0 \right) \\ &= (50 - 40) - 0 \\ &= 10 \end{aligned}$$

3. Calculer : $\int_{e^3}^{e^4} \frac{1}{x\sqrt{\ln x}} dx$.

Une primitive de $f : x \mapsto \frac{1}{x\sqrt{\ln x}}$ est $F : x \mapsto 2\sqrt{\ln x}$. Donc

$$\begin{aligned} \int_{e^3}^{e^4} \frac{1}{x\sqrt{\ln x}} dx &= [2\sqrt{\ln x}]_{e^3}^{e^4} \\ &= 2\sqrt{\ln(e^4)} - 2\sqrt{\ln(e^3)} \\ &= 2\sqrt{4} - 2\sqrt{3} \\ &= 4 - 2\sqrt{3} \end{aligned}$$

4. Quelle est la fonction dérivée de la fonction F définie sur $]0; +\infty[$ par : $x \mapsto \int_1^{x^2} \frac{1}{t} dt$?

Posons $G(u) = \int_1^u \frac{1}{t} dt$. Alors $F(x) = G(x^2)$.

D'après le théorème fondamental de l'analyse, $G'(u) = \frac{1}{u}$.

En utilisant la dérivation d'une fonction composée :

$$\begin{aligned} F'(x) &= 2x \times G'(x^2) \\ &= \frac{1}{x^2} \times 2x \\ &= \frac{2}{x} \end{aligned}$$

Donc $F'(x) = \frac{2}{x}$ pour tout $x \in]0; +\infty[$.

Remarque : Dans le cas particulier où f est continue et positive sur $[a; b]$ (avec $a \leq b$), l'intégrale $\int_a^b f(x) dx$ représente, comme on l'a vu, l'aire (en unités d'aire) de la surface comprise entre la courbe représentative de la fonction f , l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = a$ et $x = b$.

Cette aire se calcule donc $F(b) - F(a)$ où F est une primitive quelconque de f sur $[a; b]$.

B. Quelques propriétés

■ PROPRIÉTÉ : Cas particulier de la linéarité

Soit f une fonction continue et positive sur un intervalle $[a; b]$. Alors

$$\forall \lambda \in \mathbb{R}_+, \int_a^b \lambda f(x) dx = \lambda \int_a^b f(x) dx$$

Démonstration.

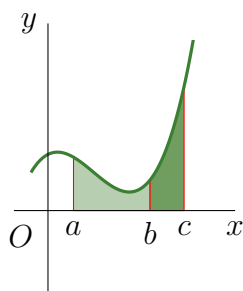
$$\begin{aligned} \int_a^b \lambda f(x) dx &= [\lambda F(x)]_a^b \\ &= \lambda F(b) - \lambda F(a) \\ &= \lambda (F(b) - F(a)) \\ &= \lambda [F(x)]_a^b \\ &= \lambda \int_a^b f(x) dx \end{aligned}$$

□

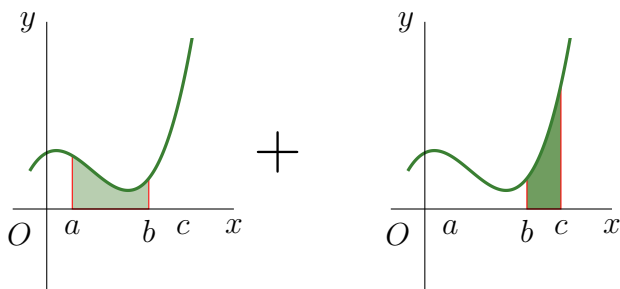
■ PROPRIÉTÉ : Relation de Chasles²

Si la fonction f est continue et positive sur l'intervalle I et si a, b et c sont trois tels que $a \leq b \leq c$, alors

$$\int_a^c f(x) dx = \int_a^b f(x) dx + \int_b^c f(x) dx$$



=



C. Calcul de l'intégrale d'une fonction de signe quelconque

Comment s'interprète le calcul de $\int_a^b f(x) dx$ lorsque la fonction f a un signe variable sur l'intervalle $[a; b]$?

Observons déjà que si f est continue et $f \leq 0$ sur l'intervalle $[a; b]$ (avec $a \leq b$), alors la propriété de

linéarité n'est pas suffisante. En effet, $-f$ est positive, mais

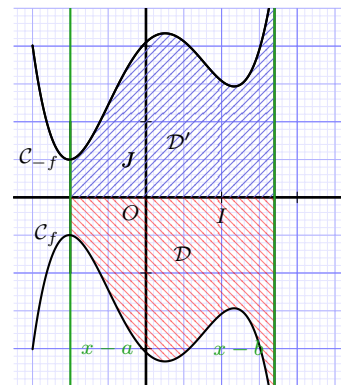
$$\int_a^b -f(x) dx = - \int_a^b f(x) dx$$

n'est pas bien définie, car l'intégrale $\int_a^b f(x) dx$ n'a pas de sens pour l'instant... On écrit plutôt :

$$\begin{aligned} F(b) - F(a) &= -[(-F)(b) - (-F)(a)] \\ &= - \int_a^b (-f)(x) dx \end{aligned}$$

car $-F$ est une primitive de $-f$ sur $[a; b]$.

Or, comme $f \leq 0$, alors $-f \geq 0$ sur $[a; b]$ et donc $\int_a^b (-f)(x) dx$ s'interprète comme l'aire de la surface (bleue) comprise entre la courbe représentative de la fonction $-f$, l'axe des abscisses et les droites d'équation $x = a$ et $x = b$.

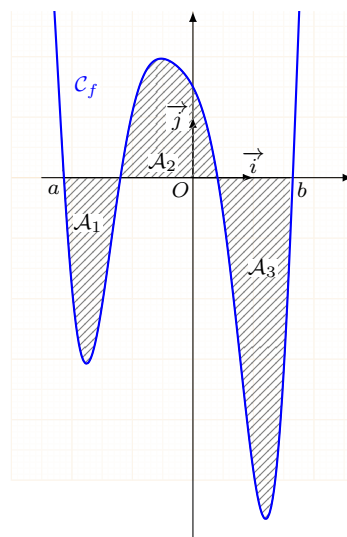


Comme cette aire est la même que celle de la surface symétrique par rapport à l'axe des abscisses, on en conclut que :

Si f est continue et positive et $f \leq 0$ sur l'intervalle $[a; b]$ (avec $a \leq b$), alors : $\int_a^b f(x) dx = -\mathcal{A}$ où $\mathcal{A}$ est l'aire de la surface comprise entre la courbe représentative de la fonction f , l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = a$ et $x = b$.

Ainsi, grâce à la relation de Chasles (généralisée), on a dans le cas d'une fonction continue de signe non constant sur l'intervalle $[a; b]$. Par exemple :

$$\int_a^b f(x) dx = -\mathcal{A}_1 + \mathcal{A}_2 - \mathcal{A}_3$$



2. Michel Chasles (1793-1880) est un mathématicien français.

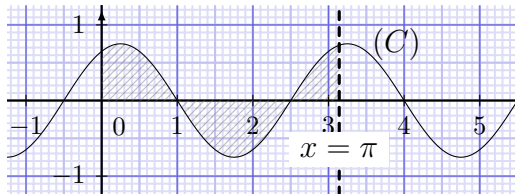
Exemple :

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \sin\left(2x + \frac{\pi}{3}\right)$$

et $\mathcal{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé d'unités graphiques 2 cm.

Calculer l'aire $\mathcal{A}$ de la surface grisée, comprise entre la courbe $\mathcal{C}$, l'axe des abscisses et les droites d'équation $x = 0$ et $x = \pi$, en unités d'aire puis en cm^2 .



Déterminons la fonction f change de signe sur l'intervalle $[0; \pi]$. La fonction s'annule lorsque :

$$2x + \frac{\pi}{3} = k\pi \quad \text{où } k \in \mathbb{Z}$$

D'où :

$$x = \frac{k\pi - \frac{\pi}{3}}{2} = \frac{k\pi}{2} - \frac{\pi}{6}$$

Pour $x \in [0; \pi]$, cherchons les valeurs de k associées :

- Pour $k = 1$: $x = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{6} = \frac{3\pi - \pi}{6} = \frac{2\pi}{6} = \frac{\pi}{3}$
- Pour $k = 2$: $x = \pi - \frac{\pi}{6} = \frac{6\pi - \pi}{6} = \frac{5\pi}{6}$

Étudions le signe de f sur $[0; \pi]$:

- En $x = 0$: $f(0) = \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2} > 0$
- Pour $x \in \left[0; \frac{\pi}{3}\right]$: $f(x) > 0$
- Pour $x \in \left[\frac{\pi}{3}; \frac{5\pi}{6}\right]$: $f(x) < 0$
- Pour $x \in \left[\frac{5\pi}{6}; \pi\right]$: $f(x) > 0$

L'aire de la surface grisée est

$$\begin{aligned}\mathcal{A} &= \int_0^\pi |f(x)| \, dx \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{3}} f(x) \, dx - \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{5\pi}{6}} f(x) \, dx + \int_{\frac{5\pi}{6}}^\pi f(x) \, dx\end{aligned}$$

Soit F une primitive de f . Alors :

$$\forall x \in [0; \pi], F(x) = -\frac{1}{2} \cos\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) + C$$

Calcul de chaque intégrale :

$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{\pi}{3}} f(x) \, dx &= \left[-\frac{1}{2} \cos\left(2x + \frac{\pi}{3}\right)\right]_0^{\frac{\pi}{3}} \\ &= -\frac{1}{2} \cos\left(\frac{2\pi}{3} + \frac{\pi}{3}\right) + \frac{1}{2} \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) \\ &= \frac{1}{2} + \frac{1}{4} \\ &= \frac{3}{4}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{5\pi}{6}} f(x) \, dx &= \left[-\frac{1}{2} \cos\left(2x + \frac{\pi}{3}\right)\right]_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{5\pi}{6}} \\ &= -\frac{1}{2} \cos\left(\frac{5\pi}{3} + \frac{\pi}{3}\right) + \frac{1}{2} \cos\left(\frac{2\pi}{3} + \frac{\pi}{3}\right) \\ &= -\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \\ &= -1\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\int_{\frac{5\pi}{6}}^\pi f(x) \, dx &= \left[-\frac{1}{2} \cos\left(2x + \frac{\pi}{3}\right)\right]_{\frac{5\pi}{6}}^\pi \\ &= -\frac{1}{2} \cos\left(2\pi + \frac{\pi}{3}\right) + \frac{1}{2} \cos\left(\frac{5\pi}{3} + \frac{\pi}{3}\right) \\ &= -\frac{1}{4} + \frac{1}{2} \\ &= \frac{1}{4}\end{aligned}$$

Ainsi

$$\begin{aligned}\mathcal{A} &= \frac{3}{4} - (-1) + \frac{1}{4} \\ &= \frac{3}{4} + 1 + \frac{1}{4} \\ &= 2 \text{ unités d'aire}\end{aligned}$$

Conversion en cm^2 :

L'unité graphique est de 2 cm, donc une unité d'aire correspond à $(2 \text{ cm})^2 = 4 \text{ cm}^2$.

Par conséquent : $\mathcal{A} = 2 \text{ u.a.} = 8 \text{ cm}^2$

Remarque : Le Théorème Fondamental de l'Analyse affirme que si la fonction f est continue sur un intervalle I et $a \in I$, alors la fonction F définie sur I par : $F(x) = \int_a^x f(t) \, dt$ est la primitive de f s'annulant en a . Mais toute primitive de f sur I est-elle de cette forme ? La réponse est non.

Par exemple, la fonction F définie sur $I = \mathbb{R}$ par $F(x) = x^2 + 1$ est une primitive de la fonction f définie par $f(x) = 2x$ et elle ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$, donc ne peut s'écrire sous la forme $x \mapsto \int_a^x f(t) \, dt$.

3. Propriétés de l'intégration

Les propriétés suivantes sont vraies pour n'importe quelles fonctions continues.

■ PROPRIÉTÉ : Linéarité de l'intégrale

Si f et g sont deux fonctions continues sur un intervalle $[a; b]$ et k, ℓ deux nombres réels quelconques, alors :

$$\int_a^b [kf(x) + \ell g(x)] dx = k \int_a^b f(x) dx + \ell \int_a^b g(x) dx$$

Exemples :

1. Si $f(x) = 2e^x - 3x + 4$ et $g(x) = 3x + 4$ alors

$$\begin{aligned} \int_0^1 f(x) dx - \int_0^1 g(x) dx &= \int_0^1 (f(x) - g(x)) dx \\ &= \int_0^1 2e^x dx \\ &= 2 \int_0^1 e^x dx \\ &= 2[e^x]_0^1 \\ &= 2(e^1 - e^0) \\ &= 2(e - 1) \end{aligned}$$

Soient $I_1 = \int_0^1 \frac{x}{1+x^2} dx$ et $I_2 = \int_0^1 \frac{x^3}{1+x^2} dx$.
Calculer I_1 et $I_1 + I_2$. En déduire la valeur de I_2 .

Calcul de I_1 :

$$I_1 = \int_0^1 \frac{x}{1+x^2} dx$$

Une primitive de $x \mapsto \frac{x}{1+x^2}$
est $x \mapsto \frac{1}{2} \ln(1+x^2)$.

$$\begin{aligned} I_1 &= \left[\frac{1}{2} \ln(1+x^2) \right]_0^1 \\ &= \frac{1}{2} \ln(1+1^2) - \frac{1}{2} \ln(1+0^2) \\ &= \frac{1}{2} \ln(2) - \frac{1}{2} \ln(1) \\ &= \frac{1}{2} \ln(2) - 0 \\ &= \frac{1}{2} \ln(2) \end{aligned}$$

Calcul de $I_1 + I_2$:

$$\begin{aligned} I_1 + I_2 &= \int_0^1 \frac{x}{1+x^2} dx + \int_0^1 \frac{x^3}{1+x^2} dx \\ &= \int_0^1 \left(\frac{x}{1+x^2} + \frac{x^3}{1+x^2} \right) dx \\ &= \int_0^1 \frac{x+x^3}{1+x^2} dx \\ &= \int_0^1 \frac{x(1+x^2)}{1+x^2} dx \\ &= \int_0^1 x dx \\ &= \left[\frac{x^2}{2} \right]_0^1 \\ &= \frac{1}{2} - 0 \\ &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Déduction de I_2 :

$$\begin{aligned} I_1 + I_2 &= \frac{1}{2} \iff \frac{1}{2} \ln(2) + I_2 = \frac{1}{2} \\ &\iff I_2 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \ln(2) \\ &\iff I_2 = \frac{1}{2} (1 - \ln(2)) \end{aligned}$$

■ PROPRIÉTÉ : Relation de Chasles

Si la fonction f est continue sur l'intervalle I et si a, b et c sont trois réels de I , alors

$$\int_a^c f(x) dx = \int_a^b f(x) dx + \int_b^c f(x) dx$$

Remarque : Il n'y a pas à ajouter de conditions concernant les positions relatives de a, b et c .

■ PROPRIÉTÉ : Symétrie de l'intégrale

Si f est une fonction continue sur un intervalle $[a; b]$, alors

$$\int_a^b f(x) dx = - \int_b^a f(x) dx$$

Démonstration. Si la fonction f est continue sur l'intervalle $[a; b]$, alors

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x) dx + \int_b^a f(x) dx &= \int_a^a f(x) dx \\ &= 0 \end{aligned}$$

Donc $\int_a^b f(x) dx = - \int_b^a f(x) dx$. □

Exemples :

1. Si l'on sait que $\int_0^2 f(x) dx = 8$ et que $\int_2^5 f(x) dx = 13$, calculer $\int_0^5 f(x) dx$.

$$\begin{aligned}\int_0^5 f(x) dx &= \int_0^2 f(x) dx + \int_2^5 f(x) dx \\ &= 8 + 13 \\ &= 21\end{aligned}$$

2. On considère la suite $(u_n)_{n \geq 1}$ définie par : $u_n = \int_{n-1}^n \frac{x}{1+x} dx$. Calculer : $S_N = \sum_{n=1}^N u_n$ puis $\lim_{N \rightarrow +\infty} S_N$. Interpréter graphiquement le résultat.

Étape 1 : Calcul de u_n

On sait que

$$\frac{x}{1+x} = \frac{(1+x) - 1}{1+x} = \frac{1+x}{1+x} - \frac{1}{1+x} = 1 - \frac{1}{1+x}$$

Donc une primitive de la fonction $x \mapsto \frac{x}{1+x}$ est $x \mapsto x - \ln(1+x)$

Par conséquent :

$$\begin{aligned}u_n &= \int_{n-1}^n \frac{x}{1+x} dx \\ &= [x - \ln(1+x)]_{n-1}^n \\ &= (n - \ln(1+n)) - ((n-1) - \ln(1+(n-1))) \\ &= n - \ln(1+n) - n + 1 + \ln(n) \\ &= 1 + \ln(n) - \ln(1+n) \\ &= 1 + \ln\left(\frac{n}{1+n}\right)\end{aligned}$$

Étape 2 : Calcul de S_N

$$\begin{aligned}S_N &= \sum_{n=1}^N u_n \\ &= \sum_{n=1}^N \left(1 + \ln\left(\frac{n}{n+1}\right)\right) \\ &= \sum_{n=1}^N 1 + \sum_{n=1}^N \ln\left(\frac{n}{n+1}\right) \\ &= N + \sum_{n=1}^N (\ln(n) - \ln(n+1))\end{aligned}$$

La seconde somme est télescopique :

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^N (\ln(n) - \ln(n+1)) &= \ln(1) - \ln(N+1) \\ &= 0 - \ln(N+1) \\ &= -\ln(N+1)\end{aligned}$$

Donc $S_N = N - \ln(N+1)$

Étape 3 : Calcul de $\lim_{N \rightarrow +\infty} S_N$

$$\begin{aligned}\lim_{N \rightarrow +\infty} S_N &= \lim_{N \rightarrow +\infty} (N - \ln(N+1)) \\ &= \lim_{N \rightarrow +\infty} N \left(1 - \frac{\ln(N+1)}{N}\right)\end{aligned}$$

Comme

$$\begin{aligned}\lim_{N \rightarrow +\infty} \frac{\ln(N+1)}{N} &= \lim_{N \rightarrow +\infty} \frac{\ln(N+1)}{N+1} \times \lim_{N \rightarrow +\infty} \frac{N+1}{N} \\ &= 0 \times 1 \\ &= 0\end{aligned}$$

par croissances comparées, nous avons, par limite de produit :

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} S_N = +\infty$$

Étape 4 : Interprétation graphique

$S_N = \sum_{n=1}^N u_n$ représente la somme des aires sous la courbe de la fonction (définie sur $\mathbb{R}_+$) $f : x \mapsto \frac{x}{1+x}$ sur les intervalles $[0; 1]$, $[1; 2]$, ..., $[N-1; N]$. En d'autres termes :

$$S_N = \sum_{n=1}^N \left(\int_{n-1}^n \frac{x}{1+x} dx \right) = \int_0^N \frac{x}{1+x} dx$$

En calculant la limite de S_N quand n tend vers $+\infty$, on calcule ainsi l'aire sous la courbe de la fonction f « de 0 à $+\infty$ »

■ PROPRIÉTÉ : Positivité de l'intégrale

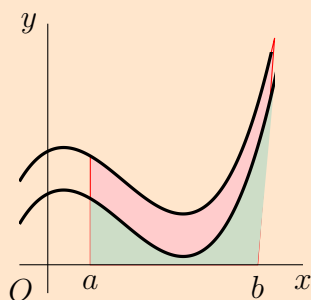
Si la fonction f est continue et positive sur l'intervalle $[a; b]$ (avec $a \leq b$), alors $\int_a^b f(x) dx \geq 0$.

Démonstration. Si la fonction f est continue et positive sur l'intervalle $[a; b]$ (avec $a \leq b$), alors $\int_a^b f(x) dx$ s'interprète comme une aire : c'est donc un nombre positif. $\square$

■ PROPRIÉTÉ : Croissance de l'intégrale

Si les fonctions f et g sont continues sur $[a; b]$ (avec $a \leq b$) et si pour tout $x \in [a; b]$, $f(x) \leq g(x)$, alors

$$\int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b g(x) dx$$



Démonstration. Si les fonctions f et g sont continues sur l'intervalle $[a; b]$ (avec $a \leq b$) et si, pour tout $x \in [a; b]$: $f(x) \leq g(x)$, alors $g(x) - f(x) \geq 0$ et donc par positivité de l'intégrale : $\int_a^b (g(x) - f(x)) dx \geq 0$ d'où, par linéarité de l'intégrale :

$$\int_a^b g(x) dx - \int_a^b f(x) dx \geq 0$$

donc :

$$\int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b g(x) dx$$

□

Remarques :

1. Si la fonction f est continue et positive sur l'intervalle $[a; b]$ (avec $a \leq b$), alors $\int_a^b f(x) dx \geq 0$ mais la réciproque est fautive.

Par exemple : $\int_0^{10} (x - 4) dx = 10 \geq 0$ et cependant, la fonction $x \mapsto x - 4$ n'est pas positive sur $[0; 10]$.

2. L'hypothèse $a \leq b$ est essentielle

$$\begin{aligned} \int_2^1 x^2 dx &= \left[\frac{x^3}{3} \right]_2^1 \\ &= \frac{1}{3} - \frac{2^3}{3} \\ &= -\frac{7}{3} \\ &< 0 \end{aligned}$$

et la fonction carré est positive sur $[1; 2]$.

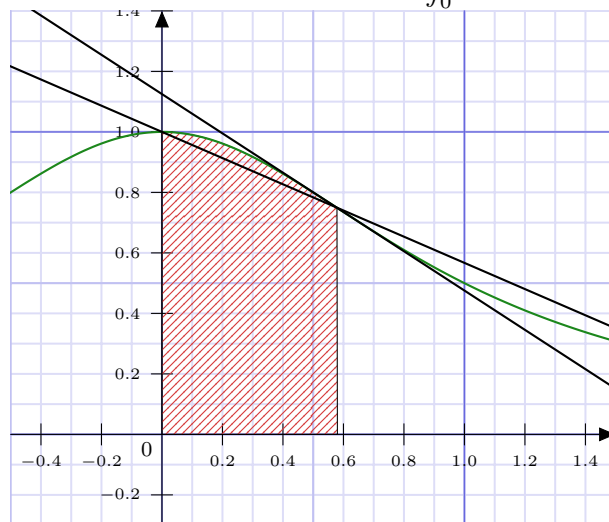
Exemple :

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \frac{1}{1+x^2}$$

et on note $\mathcal{C}$ sa courbe représentative dans un repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$ orthogonal. Remarquons qu'on ne connaît pas en Terminale de primitive de la fonction f .

Tentons d'encadrer l'intégrale $\int_0^{\frac{\sqrt{3}}{3}} f(x) dx$.



1. Montrer que la fonction f est concave sur l'intervalle $\left[0; \frac{\sqrt{3}}{3}\right]$.

f est dérivable deux fois sur $\mathbb{R}$ en tant qu'inverse de fonction dérivable et non nulle sur $\mathbb{R}$ dont le dénominateur ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$.

$$\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = \frac{-2x}{(1+x^2)^2}$$

Puis, pour tout réel x ,

$$\begin{aligned} f''(x) &= \frac{-2(1+x^2)^2 - (-2x) \times 2(1+x^2) \times 2x}{(1+x^2)^4} \\ &= \frac{-2(1+x^2) + 8x^2}{(1+x^2)^3} \\ &= \frac{-2 - 2x^2 + 8x^2}{(1+x^2)^3} \\ &= \frac{6x^2 - 2}{(1+x^2)^3} \end{aligned}$$

Sur l'intervalle $\left[0; \frac{\sqrt{3}}{3}\right]$:

$$f''(x) \leq 0 \Leftrightarrow 6x^2 - 2 \leq 0 \Leftrightarrow x^2 \leq \frac{1}{3} \Leftrightarrow |x| \leq \frac{\sqrt{3}}{3}$$

Pour tout $x \in \left[0; \frac{\sqrt{3}}{3}\right]$, on a $x^2 \leq \frac{1}{3}$, donc $f''(x) \leq 0$.

Par conséquent, f est concave sur $\left[0; \frac{\sqrt{3}}{3}\right]$.

2. Vérifier que la tangente $\mathcal{T}$ à la courbe $\mathcal{C}$ en son point d'abscisse $\frac{\sqrt{3}}{3}$ a pour équation réduite

$$y = -\frac{3\sqrt{3}}{8}x + \frac{9}{8}$$

Calculons $f\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$:

$$f\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right) = \frac{1}{1 + \frac{1}{3}} = \frac{1}{\frac{4}{3}} = \frac{3}{4}$$

Calculons $f'\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$:

$$\begin{aligned} f'\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right) &= \frac{-2 \times \frac{\sqrt{3}}{3}}{\left(\frac{4}{3}\right)^2} \\ &= \frac{-\frac{2\sqrt{3}}{3}}{\frac{16}{9}} \\ &= -\frac{2\sqrt{3}}{3} \times \frac{9}{16} \\ &= -\frac{18\sqrt{3}}{48} \\ &= -\frac{3\sqrt{3}}{8} \end{aligned}$$

L'équation de la tangente est :

$$y = -\frac{3\sqrt{3}}{8}\left(x - \frac{\sqrt{3}}{3}\right) + \frac{3}{4}$$

$$y = -\frac{3\sqrt{3}}{8}x + \frac{3\sqrt{3}}{8} \times \frac{\sqrt{3}}{3} + \frac{3}{4}$$

$$y = -\frac{3\sqrt{3}}{8}x + \frac{3}{8} + \frac{6}{8}$$

$$y = -\frac{3\sqrt{3}}{8}x + \frac{9}{8}$$

3. Vérifier que la droite $\mathcal{D}$ définie par les points de $\mathcal{C}$ d'abscisses 0 et $\frac{\sqrt{3}}{3}$ a pour équation :

$$y = -\frac{\sqrt{3}}{4}x + 1$$

$$A(0; 1) \text{ et } B\left(\frac{\sqrt{3}}{3}; \frac{3}{4}\right)$$

Le coefficient directeur de la droite (AB) est :

$$m = \frac{\frac{3}{4} - 1}{\frac{\sqrt{3}}{3}} = \frac{-\frac{1}{4}}{\frac{\sqrt{3}}{3}} = -\frac{1}{4} \times \frac{3}{\sqrt{3}} = -\frac{\sqrt{3}}{4}$$

L'équation de la droite passant par $A(0; 1)$ de coefficient directeur $m = -\frac{\sqrt{3}}{4}$ est :

$$y = -\frac{\sqrt{3}}{4}x + 1$$

4. En déduire que

$$\int_0^{\frac{\sqrt{3}}{3}} \left(-\frac{\sqrt{3}}{4}x + 1\right) dx \leq \int_0^{\frac{\sqrt{3}}{3}} f(x) dx \leq \int_0^{\frac{\sqrt{3}}{3}} \left(-\frac{3\sqrt{3}}{8}x + \frac{9}{8}\right) dx$$

Puisque f est concave sur $\left[0; \frac{\sqrt{3}}{3}\right]$, on sait que :

- La courbe de f est au-dessus de toute corde (sécante), donc : $f(x) \geq -\frac{\sqrt{3}}{4}x + 1$ pour tout $x \in \left[0; \frac{\sqrt{3}}{3}\right]$
- La courbe de f est en-dessous de toute tangente, donc : $f(x) \leq -\frac{3\sqrt{3}}{8}x + \frac{9}{8}$ pour tout $x \in \left[0; \frac{\sqrt{3}}{3}\right]$

Par croissance de l'intégrale, on obtient :

$$\int_0^{\frac{\sqrt{3}}{3}} \left(-\frac{\sqrt{3}}{4}x + 1\right) dx \leq \int_0^{\frac{\sqrt{3}}{3}} f(x) dx \leq \int_0^{\frac{\sqrt{3}}{3}} \left(-\frac{3\sqrt{3}}{8}x + \frac{9}{8}\right) dx$$

5. En déduire enfin que :

$$0,505 \leq \int_0^{\frac{\sqrt{3}}{3}} f(x) dx \leq 0,542$$

Calculons les deux intégrales encadrantes :

Borne inférieure :

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{\sqrt{3}}{3}} \left(-\frac{\sqrt{3}}{4}x + 1\right) dx &= \left[-\frac{\sqrt{3}}{8}x^2 + x\right]_0^{\frac{\sqrt{3}}{3}} \\ &= -\frac{\sqrt{3}}{8} \times \frac{1}{3} + \frac{\sqrt{3}}{3} \\ &= \frac{7\sqrt{3}}{24} \\ &\approx 0,5051 \end{aligned}$$

Borne supérieure :

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{\sqrt{3}}{3}} \left(-\frac{3\sqrt{3}}{8}x + \frac{9}{8}\right) dx &= \left[-\frac{3\sqrt{3}}{16}x^2 + \frac{9}{8}x\right]_0^{\frac{\sqrt{3}}{3}} \\ &= -\frac{3\sqrt{3}}{16} \times \frac{1}{3} + \frac{9}{8} \times \frac{\sqrt{3}}{3} \\ &= \frac{5\sqrt{3}}{16} \\ &\approx 0,5412 \end{aligned}$$

On obtient donc :

$$0,505 \leq \int_0^{\frac{\sqrt{3}}{3}} f(x) dx \leq 0,542$$

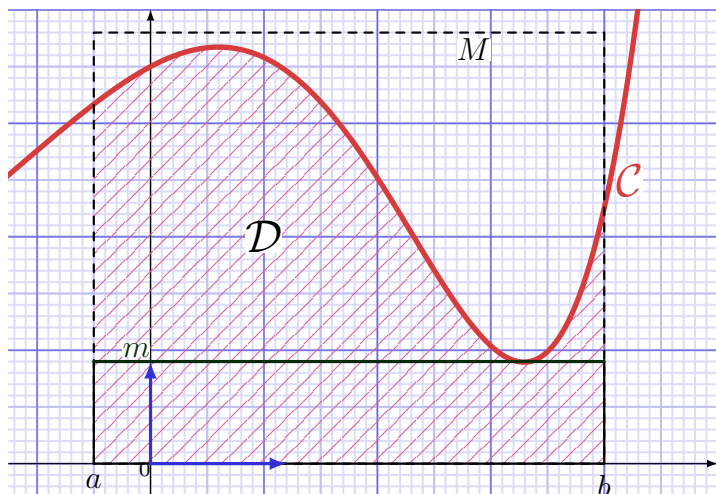
■ PROPRIÉTÉ : Inégalité de la moyenne

Soient f une fonction continue sur l'intervalle I et a et b deux réels dans I tels que $a \leq b$. On considère deux réels m et M tels que : $\forall x \in [a; b]$,

$$m \leq f(x) \leq M$$

Alors

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x) dx \leq M(b-a)$$



Démonstration. On considère une fonction f continue sur l'intervalle I et a et b des réels tels que $a \leq b$ dans I . On considère deux réels m et M tels que : $\forall x \in [a; b], m \leq f(x) \leq M$.

On en déduit alors avec la propriété de comparaison des intégrales que : $\int_a^b m dx \leq \int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b M dx$ et donc : $m(b-a) \leq \int_a^b f(x) dx \leq M(b-a)$. $\square$

■ COROLLAIRE :

Soient f une fonction continue sur l'intervalle I et a et b deux réels dans I tels que $a \leq b$. Si M est un réel tel que pour tout $x \in [a; b]$, $|f(x)| \leq M$, alors : $\left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq M(b-a)$.

Démonstration. Si $|f(x)| \leq M$ sur $[a; b]$ (avec $a \leq b$) alors pour tout $x \in [a; b]$: $-M \leq f(x) \leq M$ et donc avec l'inégalité de la moyenne :

$$-M(b-a) \leq \int_a^b f(x) dx \leq M(b-a)$$

autrement dit :

$$\left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq M(b-a)$$

$\square$

Exemple :

Montrer que pour tout $x \in \left[-\frac{\pi}{4}; 0\right]$,

$$1 \leq \frac{1}{\cos x} \leq \sqrt{2}$$

Puisque $\cos$ est croissante sur $\left[-\frac{\pi}{4}; 0\right]$, on a :

$$\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) \leq \cos(x) \leq \cos(0)$$

i.e.

$$\frac{\sqrt{2}}{2} \leq \cos(x) \leq 1$$

Comme $\cos(x) > 0$ sur l'intervalle considéré, on peut inverser les inégalités :

$$\frac{1}{1} \leq \frac{1}{\cos(x)} \leq \frac{1}{\frac{\sqrt{2}}{2}}$$

i.e.

$$1 \leq \frac{1}{\cos(x)} \leq \frac{2}{\sqrt{2}} = \frac{2\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}$$

Donc : $1 \leq \frac{1}{\cos x} \leq \sqrt{2}$

En déduire que

$$\frac{\pi}{4} \leq \int_{-\frac{\pi}{4}}^0 \frac{1}{\cos x} dx \leq \frac{\pi}{4} \sqrt{2}$$

On a établi que, pour tout $x \in \left[-\frac{\pi}{4}; 0\right]$:

$$1 \leq \frac{1}{\cos x} \leq \sqrt{2}$$

On a :

- $f(x) = \frac{1}{\cos x}$
- $a = -\frac{\pi}{4}$ et $b = 0$
- $m = 1$ (valeur minimale de f)
- $M = \sqrt{2}$ (valeur maximale de f)
- $b-a = 0 - \left(-\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi}{4}$

D'après l'inégalité de la moyenne :

$$1 \times \frac{\pi}{4} \leq \int_{-\frac{\pi}{4}}^0 \frac{1}{\cos x} dx \leq \sqrt{2} \times \frac{\pi}{4}$$

Conclusion :

$$\frac{\pi}{4} \leq \int_{-\frac{\pi}{4}}^0 \frac{1}{\cos x} dx \leq \frac{\pi\sqrt{2}}{4}$$

4. Quelques applications du calcul intégral

A. Calcul de l'aire de la surface comprise entre deux courbes

Exemple :

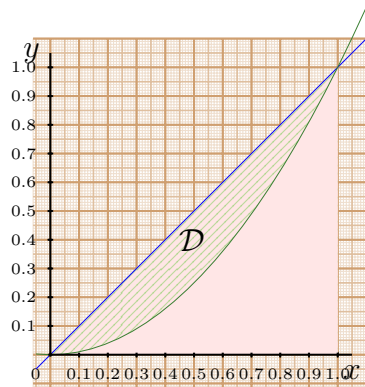
On veut calculer l'aire de la surface $\mathcal{D}$ définie

$$\text{par } \begin{cases} 0 \leq x \leq 1 \\ x^2 \leq y \leq x \end{cases}$$

et hachurée ci-contre.

Soient les fonctions f et g définies respectivement par $g(x) = x^2$ et $f(x) = x$. Pour tout x de $[0; 1]$:

$$g(x) \leq f(x).$$



Ainsi l'aire de la surface $\mathcal{D}$ est

$$\int_0^1 f(x) dx - \int_0^1 g(x) dx = \int_0^1 (f(x) - g(x)) dx$$

par linéarité de l'intégrale.

Donc l'aire de la surface $\mathcal{D}$ est

$$\int_0^1 (x - x^2) dx = \left[\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} \right]_0^1 = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} - 0 = \frac{1}{6}$$

et l'aire du domaine $\mathcal{D}$ est $\frac{1}{6}$ u.a.

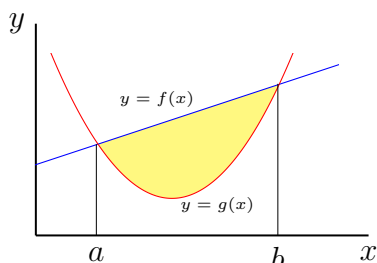
Plus généralement, on montre que :

■ PROPRIÉTÉ :

Si les fonctions f et g sont continues sur l'intervalle $[a; b]$ et si pour tout x dans l'intervalle $[a; b]$: $f(x) \geq g(x)$, c'est-à-dire si sur l'intervalle $[a; b]$: la courbe $\mathcal{C}_f$ est située au-dessus de la courbe $\mathcal{C}_g$ alors :

l'aire de la surface délimitée par les courbes $\mathcal{C}_f$, $\mathcal{C}_g$, les droites d'équations $x = a$ et $x = b$ est :

$$\int_a^b (f(x) - g(x)) dx \text{ u.a.}$$



Exemple :

On donne les fonctions f et g définies sur $[0; +\infty[$ respectivement par

$$f(x) = x - 3 + \frac{\ln x}{x} \text{ et } g(x) = x - 3$$

Étudier la position relative des courbes ($\mathcal{C}_g$) et ($\mathcal{C}_f$) sur l'intervalle $[0; +\infty[$ et en déduire l'aire de la surface délimitée par ces courbes et les droites d'équations $x = \frac{1}{e}$ et $x = 2$.

Pour $\alpha > 1$, calculer $I(\alpha) = \int_1^\alpha (f(x) - g(x)) dx$ puis $\lim_{\alpha \rightarrow +\infty} I(\alpha)$ et interpréter le résultat.

1. Position relative de $\mathcal{C}_g$ et $\mathcal{C}_f$

Étude du signe de $f(x) - g(x)$

Calculons $f(x) - g(x)$:

$$\begin{aligned} f(x) - g(x) &= \left(x - 3 + \frac{\ln x}{x} \right) - (x - 3) \\ &= \frac{\ln x}{x} \end{aligned}$$

Étudions le signe de $h(x) = \frac{\ln x}{x}$ sur $]0; +\infty[$:

- Pour $x \in]0; 1[$: $\ln x < 0$ et $x > 0$, donc $h(x) = \frac{\ln x}{x} < 0$
- Pour $x = 1$: $\ln 1 = 0$, donc $h(1) = 0$
- Pour $x \in]1; +\infty[$: $\ln x > 0$ et $x > 0$, donc $h(x) = \frac{\ln x}{x} > 0$

Conclusion :

- Sur $]0; 1[$, $f(x) < g(x)$: $\mathcal{C}_f$ est en dessous de $\mathcal{C}_g$
- En $x = 1$, $f(1) = g(1)$: les courbes se coupent au point $(1; -2)$
- Sur $]1; +\infty[$, $f(x) > g(x)$: $\mathcal{C}_f$ est au dessus de $\mathcal{C}_g$

Calcul de l'aire entre les courbes sur $\left[\frac{1}{e}; 2\right]$

Calculons l'aire $A = \int_{\frac{1}{e}}^2 |f(x) - g(x)| dx$

Comme $\frac{1}{e} < 1 < 2$, d'après la relation de Chasles :

$$\begin{aligned} A &= \int_{\frac{1}{e}}^1 |f(x) - g(x)| dx + \int_1^2 |f(x) - g(x)| dx \\ &= \int_{\frac{1}{e}}^1 |g(x) - f(x)| dx + \int_1^2 |f(x) - g(x)| dx \\ &= \int_{\frac{1}{e}}^1 \left(-\frac{\ln x}{x}\right) dx + \int_1^2 \frac{\ln x}{x} dx \\ &= -\int_{\frac{1}{e}}^1 \frac{\ln x}{x} dx + \int_1^2 \frac{\ln x}{x} dx \end{aligned}$$

Soit f la fonction définie, pour tout $x \in \left[\frac{1}{e}; 2\right]$, par

$f(x) = \frac{\ln x}{x}$. Une primitive de f est la fonction F définie, pour tout $x \in \left[\frac{1}{e}; 2\right]$ par $F(x) = \frac{(\ln x)^2}{2}$.

En effet, $f = uu'$, avec $u(x) = \ln x$, donc $F = \frac{u^2}{2}$.

Calculons chaque intégrale :

Première intégrale :

$$\begin{aligned} -\int_{\frac{1}{e}}^1 \frac{\ln x}{x} dx &= -\left[\frac{(\ln x)^2}{2}\right]_{\frac{1}{e}}^1 \\ &= -\left(\frac{(\ln 1)^2}{2} - \frac{(\ln \frac{1}{e})^2}{2}\right) \\ &= -\left(0 - \frac{(-1)^2}{2}\right) \\ &= -\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Seconde intégrale :

$$\begin{aligned} \int_1^2 \frac{\ln x}{x} dx &= \left[\frac{(\ln x)^2}{2}\right]_1^2 \\ &= \frac{(\ln 2)^2}{2} - \frac{(\ln 1)^2}{2} \\ &= \frac{(\ln 2)^2}{2} - 0 = \frac{(\ln 2)^2}{2} \end{aligned}$$

Aire totale :

$$\begin{aligned} A &= \frac{1}{2} + \frac{(\ln 2)^2}{2} = \frac{1 + (\ln 2)^2}{2} \\ A &= \frac{1 + (\ln 2)^2}{2} \text{ unités d'aire} \end{aligned}$$

2. Calcul de $I(\alpha)$ pour $\alpha > 1$

Pour $\alpha > 1$, calculons :

$$\begin{aligned} I(\alpha) &= \int_1^\alpha (f(x) - g(x)) dx \\ &= \int_1^\alpha \frac{\ln x}{x} dx \\ &= \left[\frac{(\ln x)^2}{2}\right]_1^\alpha \\ &= \frac{(\ln \alpha)^2}{2} - \frac{(\ln 1)^2}{2} \\ &= \frac{(\ln \alpha)^2}{2} \end{aligned}$$

3. Limite de $I(\alpha)$ quand α tend vers $+\infty$

$$\begin{aligned} \lim_{\alpha \rightarrow +\infty} I(\alpha) &= \lim_{\alpha \rightarrow +\infty} \frac{(\ln \alpha)^2}{2} \\ &= +\infty \end{aligned}$$

car $\lim_{\alpha \rightarrow +\infty} \ln \alpha = +\infty$.

$$\lim_{\alpha \rightarrow +\infty} I(\alpha) = +\infty$$

4. Interprétation du résultat

Le résultat $\lim_{\alpha \rightarrow +\infty} I(\alpha) = +\infty$ signifie que l'aire de la surface comprise entre les courbes $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$ sur l'intervalle $[1; \alpha]$ tend vers l'infini quand α tend vers l'infini.

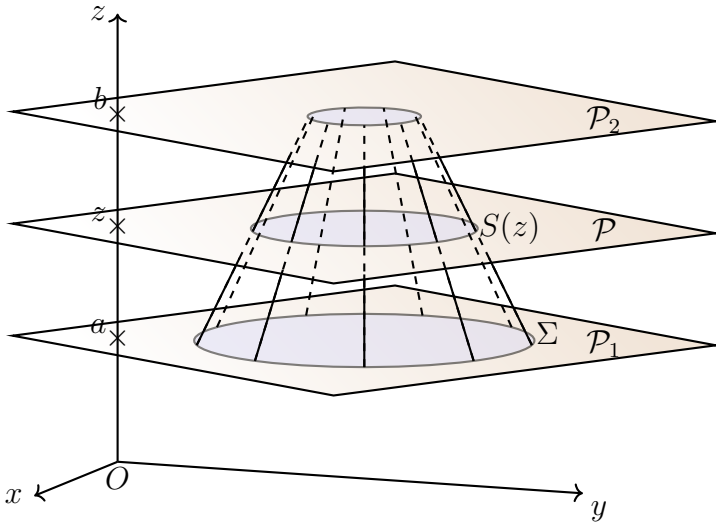
Géométriquement, cela indique que, bien que la fonction $h : x \mapsto \frac{\ln x}{x}$ tende vers 0 quand x tend vers

$+\infty$ (car $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$), l'aire sous cette courbe sur

$[1, +\infty[$ n'est pas finie. La décroissance de $\frac{\ln x}{x}$ vers 0 n'est pas assez rapide pour que l'intégrale converge.

B. Calculs de volumes

L'espace est muni d'un repère orthonormal. On considère un solide Σ délimité par deux plans $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$ d'équations respectives $z = a$ et $z = b$.



On suppose que l'on connaît l'expression de l'aire $S(z)$ de la surface section du solide Σ par le plan de cote z où $a \leq z \leq b$.

Si la fonction définie sur l'intervalle $[a; b]$ par :

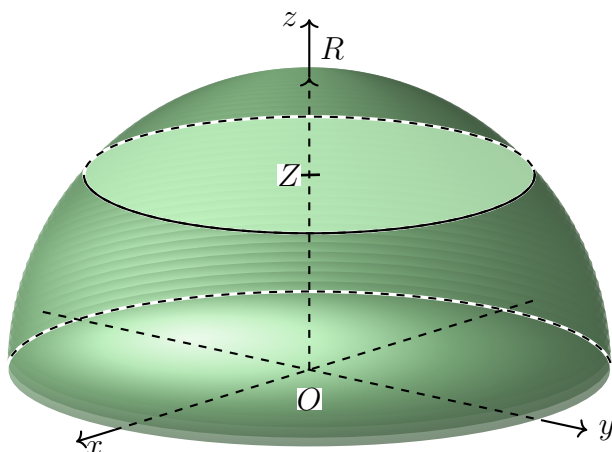
$$z \mapsto S(z)$$

est une fonction continue, alors le volume $\mathcal{V}$ du solide Σ , exprimé en unités de volume, est donné par :

$$\mathcal{V} = \int_a^b S(z) dz$$

Exemple : (Calcul du volume d'une boule.)

On considère la demi-boule de centre O , de rayon R contenue dans le demi-espace défini par $z \geq 0$.



- (a) Montrer qu'avec les notations précédentes, pour tout $z \in [0; R]$, $S(z) = \pi(R^2 - z^2)$

Considérons une section horizontale de la demi-boule à la hauteur z (avec $0 \leq z \leq R$).

Cette section est un disque de centre $(0; 0; z)$ situé dans le plan d'équation $z = k$, où k est une constante réelle appartenant à $[0; R]$.

Pour déterminer le rayon de ce disque, nous utilisons l'équation de la sphère de centre O et de rayon R : $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$

À la hauteur z fixée, les points $(x; y; z)$ de la section vérifient : $x^2 + y^2 = R^2 - z^2$

Cette équation représente un cercle dans le plan $z = k$, de centre $(0; 0; k)$ et de rayon $r = \sqrt{R^2 - z^2}$.

L'aire de ce disque est donc :

$$S(z) = \pi r^2 = \pi(R^2 - z^2)$$

Cette formule est valide pour $z = 0$ et $z = R$ car

- Pour $z = 0$: $S(0) = \pi R^2$ (disque de base de rayon maximal R)
- Pour $z = R$: $S(R) = 0$ (point au sommet de la demi-sphère)

- (b) En déduire le volume d'une boule de rayon R .

Le volume de la demi-boule s'obtient en intégrant l'aire des sections de $z = 0$ à $z = R$:

$$\begin{aligned} \mathcal{V}_{\text{demi-boule}} &= \int_0^R S(z) dz \\ &= \int_0^R \pi (R^2 - z^2) dz \\ &= \pi \int_0^R (R^2 - z^2) dz \\ &= \pi \left[R^2 z - \frac{z^3}{3} \right]_0^R \\ &= \pi \left(R^2 \times R - \frac{R^3}{3} - 0 \right) \\ &= \pi \left(R^3 - \frac{R^3}{3} \right) \\ &= \pi R^3 \left(1 - \frac{1}{3} \right) \\ &= \pi R^3 \times \frac{2}{3} \\ &= \frac{2\pi R^3}{3} \end{aligned}$$

Le volume de la boule complète est le double du volume de la demi-boule :

$$\mathcal{V}_{\text{boule}} = 2 \times \mathcal{V}_{\text{demi-boule}} = 2 \times \frac{2\pi R^3}{3} = \frac{4}{3}\pi R^3$$

C. Valeur moyenne d'une fonction

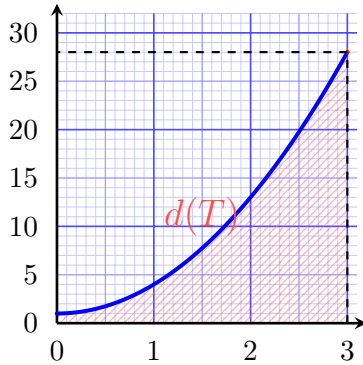
Exemple :

Un mobile situé au point A à l'instant $t = 0$, se déplace sur un segment $[AB]$.

À l'instant t (exprimé en secondes), la vitesse du mobile est $v(t)$ (exprimée en $m \times s^{-1}$), où $v(t) = 3t^2 + 1$ et $t \in [0; 3]$.

À l'instant $t = 3$, le mobile atteint le point B .

- On représente ci-dessous la vitesse du mobile en fonction du temps.



- À l'instant t , pendant une durée très courte, notée dt , on peut considérer que la vitesse ne varie pas. Quelle est la distance parcourue pendant cette durée ?

Comment exprimer alors la distance $d(T)$ parcourue par le mobile entre les instants $t = 0$ et $t = T$?

Pendant la durée très courte dt , si la vitesse reste constante égale à $v(t)$, alors la distance parcourue est :

$$d(t) = v(t) \times dt$$

Pour obtenir la distance totale $d(T)$ parcourue entre $t = 0$ et $t = T$, il faut sommer toutes ces petites distances élémentaires, ce qui correspond à l'intégrale : $d(T) = \int_0^T v(t) dt$

- Hachurer sur le graphique la surface dont l'aire est $d(T)$ et calculer $d(T)$

$$\begin{aligned} d(T) &= \int_0^T (3t^2 + 1) dt \\ &= \left[\frac{3t^3}{3} + t \right]_0^T \\ &= [t^3 + t]_0^T \\ &= (T^3 + 3) - (0^3 + 0) \\ &= T^3 + 3 \end{aligned}$$

La distance $d(T)$ est donc $T^3 + 3$ mètres.

- Exprimer la vitesse moyenne v_m du mobile entre les instants $t = 0$ et $t = 3$ puis la calculer.

La vitesse moyenne est définie par :

$$v_m = \frac{\text{distance parcourue}}{\text{durée}} = \frac{d_3}{3 - 0} = \frac{d_3}{3}$$

$$\text{Or, } d_3 = \int_0^3 v(t) dt = 30 \text{ mètres.}$$

Donc :

$$v_m = \frac{30}{3} = 10 \text{ m} \times \text{s}$$

On peut aussi l'exprimer directement par :

$$v_m = \frac{1}{3 - 0} \int_0^3 v(t) dt = \frac{1}{3} \int_0^3 (3t^2 + 1) dt$$

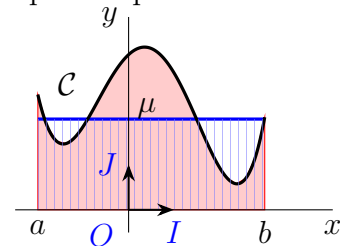
Ainsi, la **valeur moyenne** de la fonction v sur l'intervalle $[0; 3]$ est : $v_m = \frac{1}{3 - 0} \int_0^3 v(t) dt$.

■ DÉFINITION :

Soit f une fonction continue sur l'intervalle $[a; b]$ où $a < b$. Le réel $\mu = \frac{1}{b - a} \int_a^b f(x) dx$ s'appelle la **valeur moyenne** de la fonction f sur $[a; b]$.

Remarque : La fonction g est la fonction constante sur $[a; b]$ de « même intégrale » que f sur cet intervalle.

Considérons une fonction f continue sur l'intervalle $[a; b]$ et g la fonction constante définie par $g(x) = \mu$, avec μ un réel quelconque.



On souhaite trouver la fonction g telle que $\int_a^b f(x) dx = \int_a^b g(x) dx$ où $g(x) = \mu$. Or

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x) dx &= \int_a^b g(x) dx \iff \int_a^b f(x) dx = \int_a^b \mu dx \\ &\iff \int_a^b f(x) dx = [\mu x]_a^b \\ &\iff \int_a^b f(x) dx = \mu b - \mu a \\ &\iff \int_a^b f(x) dx = \mu (b - a) \\ &\iff \mu = \frac{1}{b - a} \int_a^b f(x) dx \end{aligned}$$

5. Formule d'intégration par parties

Idée : Si les fonctions u et v sont dérivables sur l'intervalle $[a; b]$, alors leur produit l'est aussi et :

$$\forall x \in [a; b], (uv)'(x) = u'(x)v(x) + v'(x)u(x)$$

Donc $\forall x \in [a; b], u'(x)v(x) = (uv)'(x) - v'(x)u(x)$.
Si on sait de plus que les fonctions dérivées u' et v' sont continues sur l'intervalle $[a; b]$ alors toutes les fonctions considérées sont continues sur $[a; b]$ donc on peut intégrer l'égalité sur $[a; b]$.

On obtient :

$$\int_a^b u'(x)v(x) dx = \int_a^b ((uv)'(x) - v'(x)u(x)) dx$$

D'où, par linéarité de l'intégrale :

$$\int_a^b u'(x)v(x) dx = \int_a^b (uv)'(x) dx - \int_a^b v'(x)u(x) dx$$

Et enfin, comme uv est une primitive de $(uv)'$,

$$\int_a^b u'(x)v(x) dx = [u(x)v(x)]_a^b - \int_a^b v'(x)u(x) dx$$

■ **PROPRIÉTÉ :** Formule d'intégration par parties

Si les fonctions u et v sont dérivables sur l'intervalle $[a; b]$ et si leurs dérivées sont continues sur cet intervalle, alors

$$\int_a^b u'(x)v(x) dx = [u(x)v(x)]_a^b - \int_a^b v'(x)u(x) dx$$

Remarque : Quel est son intérêt ? Si on veut calculer $\int_a^b u'(x)v(x) dx$ et qu'il est plus facile d'obtenir $\int_a^b v'(x)u(x) dx$, alors cette formule s'impose.

Exemples :

1) On se propose de calculer $\int_0^1 xe^x dx$: comme la fonction à intégrer ne se présente pas sous une forme connue (en particulier $u'e^u$), on n'en voit pas immédiatement de primitive. Et comme cette fonction se présente sous forme de produit, on essaie d'appliquer la formule d'intégration par parties :

Remarque : On connaît la dérivée et les primitives de $x \mapsto x$ et $x \mapsto e^x$. Donc on peut choisir de deux façons de dériver l'une et d'intégrer l'autre. Cependant, on réfléchit à celle qui « simplifie » les calculs plutôt que de les compliquer...

On pose $u'(x) = e^x$, $v(x) = x$.

Donc $u(x) = e^x$, $v'(x) = 1$.

u et v sont continues sur $\mathbb{R}$ de dérivées continues sur $\mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} \int_0^1 xe^x dx &= [xe^x]_0^1 - \int_0^1 1 \times e^x dx \\ &= [xe^x]_0^1 - [e^x]_0^1 \\ &= (e - 0) - (e - 1) \\ &= 1 \end{aligned}$$



Attention

Il paraît judicieux de dériver les fonctions polynômes, mais voici un cas où ce n'est pas la bonne méthode.

Exemple :

2) Calculer à l'aide d'une intégration par parties :

$$\int_1^e x^2 \ln x dx$$

On pose $u'(x) = x^2$, $v(x) = \ln x$.

Donc $u(x) = \frac{x^3}{3}$, $v'(x) = \frac{1}{x}$.

u et v sont continues sur $\mathbb{R}_+^*$ de dérivées continues sur $\mathbb{R}_+^*$, en particulier sur $[1; e]$.

$$\begin{aligned} \int_1^e x^2 \ln x dx &= \left[\frac{x^3}{3} \ln x \right]_1^e - \int_1^e \frac{x^3}{3} \times \frac{1}{x} dx \\ &= \left[\frac{x^3}{3} \ln x \right]_1^e - \int_1^e \frac{x^2}{3} dx \\ &= \left[\frac{x^3}{3} \ln x \right]_1^e - \left[\frac{x^3}{9} \right]_1^e \\ &= \left(\frac{e^3}{3} \times 1 - \frac{1^3}{3} \times 0 \right) - \left(\frac{e^3}{9} - \frac{1^3}{9} \right) \\ &= \frac{e^3}{3} - \frac{e^3}{9} + \frac{1}{9} \\ &= \frac{3e^3}{9} - \frac{e^3}{9} + \frac{1}{9} \\ &= \frac{2e^3 + 1}{9} \end{aligned}$$

3) La formule d'intégration par parties permet de calculer une primitive de la fonction $\ln$ sur $]0; +\infty[$. La primitive sur $]0; +\infty[$ de la fonction $\ln$ s'annulant en 1, par exemple, est la fonction L définie sur $]0; +\infty[$ par : $L(x) = \int_1^x \ln(t) dt$ que l'on peut écrire sous la forme

$$L(x) = \int_1^x 1 \times \ln(t) dt$$

On pose : $u'(t) = 1$, $v(t) = \ln t$ et $u(t) = t$, $v'(t) = \frac{1}{t}$. u et v sont continues sur $\mathbb{R}_+^*$ de dérivées continues sur $\mathbb{R}_+^*$. Alors :

$$\begin{aligned} L(x) &= \int_1^x 1 \times \ln t dt \\ &= [t \ln t]_1^x - \int_1^x t \times \frac{1}{t} dt \text{ par IPP} \\ &= [t \ln t]_1^x - \int_1^x 1 dt \\ &= [t \ln t]_1^x - [t]_1^x \\ &= [t \ln t - t]_1^x \\ &= (x \ln x - x) - (1 \ln 1 - 1) \\ &= x \ln x - x + 1 \end{aligned}$$

4) On pose pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$I_n = \int_0^1 x^n e^{1-x} dx$$

À l'aide d'une intégration par parties, montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$I_{n+1} = (n+1)I_n - 1$$

On pose $u(x) = x^{n+1}$, $v'(x) = e^{1-x}$.

Donc $u'(x) = (n+1)x^n$, $v(x) = -e^{1-x}$.

u et v sont continues sur $\mathbb{R}_+^*$ de dérivées continues sur $\mathbb{R}_+^*$, donc sur $[0; 1]$.

$$\begin{aligned} I_{n+1} &= \int_0^1 x^{n+1} e^{1-x} dx \\ &= [x^{n+1} \times (-e^{1-x})]_0^1 - \int_0^1 (n+1)x^n \times (-e^{1-x}) dx \\ &= [-x^{n+1} e^{1-x}]_0^1 + (n+1) \int_0^1 x^n e^{1-x} dx \\ &= (-1^{n+1} \times e^{1-1} - (-0^{n+1} \times e^{1-0})) + (n+1)I_n \\ &= (-1 \times e^0 - 0) + (n+1)I_n \\ &= -1 + (n+1)I_n \\ &= (n+1)I_n - 1 \end{aligned}$$

Donc pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $I_{n+1} = (n+1)I_n - 1$.

5) À l'aide d'une double intégration par parties, calculer

$$\int_0^1 x^2 e^x dx$$

• Première intégration par parties :

On pose $u'(x) = e^x$, $v(x) = x^2$.

Donc $u(x) = e^x$, $v'(x) = 2x$.

u et v sont continues sur $\mathbb{R}$ de dérivées continues sur $\mathbb{R}$, donc sur $[0; 1]$. donc sur $[0; 1]$.

$$\begin{aligned} \int_0^1 x^2 e^x dx &= [x^2 e^x]_0^1 - \int_0^1 e^x \times 2x dx \\ &= [x^2 e^x]_0^1 - 2 \int_0^1 x e^x dx \\ &= (1^2 \times e - 0^2 \times e^0) - 2 \int_0^1 x e^x dx \\ &= e - 2 \int_0^1 x e^x dx \end{aligned}$$

• Deuxième intégration par parties pour $\int_0^1 x e^x dx$:
Dans l'exemple 1, on a montré que

$$\int_0^1 x e^x dx = 1$$

En substituant dans le résultat de la première intégration, on obtient :

$$\begin{aligned} \int_0^1 x^2 e^x dx &= e - 2 \int_0^1 x e^x dx \\ &= e - 2 \times 1 \\ &= e - 2 \end{aligned}$$

■ « THÉORÈME » : de Dhénin³

Quand on veut intégrer un produit de fonctions dont on ne connaît pas de primitive :

- Si le produit contient du logarithme, il faut dériver le logarithme, quoi qu'il arrive.
- Si le produit est de la forme

« polynôme $\times$ exponentielle »

il faut dériver le polynôme.

- Si le produit est de la forme

« polynôme $\times$ fonction trigonométrique »

il faut habituellement effectuer deux intégrations par parties, en dérivant le polynôme les deux fois.