

Séquence XXIII – Arithmétique (partie 2) – rappels

Exercice XXIII.1

Est-il vrai que :

1. Si l'entier n est un multiple de 15, alors n^2 est un multiple de 45 ?
2. Si n est un multiple de 6, alors $\frac{n^2 + 6n}{2}$ est un multiple de 72 ?

Exercice XXIII.2

Montrer que, pour tout entier n , $4(n+1)^2 - (n+2)^2$ est un multiple de n .

Exercice XXIII.3

Montrer que la somme de deux nombres impairs consécutifs est un multiple de 4.

Exercice XXIII.4

Soit a et b deux entiers relatifs. Montrer que $(a + 2b)^4 - a^4$ est divisible par 8.

Exercice XXIII.5

Est-il vrai que :

1. Le produit de deux diviseurs d'un même nombre est aussi un diviseur de ce nombre ?
2. Si 4 divise n , alors $\frac{n^2}{4}$ est un entier multiple de 8 ?

Exercice XXIII.6

Déterminer tous les entiers relatifs n tels que $2n - 7$ divise 6.

Exercice XXIII.7

1. (a) Déterminer les entiers relatifs a et b tels que : $a \times b = 15$.
(b) Déterminer l'ensemble des entiers positifs x et y tels que : $x^2 - y^2 = 15$.
(c) Si on ajoute 7 ou 22 à un entier positif n , on obtient dans les deux cas un carré parfait. Déterminer cet entier n .
2. Déterminer l'ensemble des entiers relatifs x et y tels que : $x^4 = y^2 + 20$.
3. Déterminer tous les couples d'entiers naturels x et y tels que $x^2 = xy + 15$.

Exercice XXIII.8

Est-il vrai que :

1. Si d est un diviseur commun de a et de b , alors $3d$ divise $6a + 9b$?
2. Si d est un diviseur commun de a et de b , alors $\frac{d}{3}$ divise $\frac{3a^3 + 2ab^2 - 3b^3}{12}$?

Exercice XXIII.9

1. Développer l'expression $(a + b)^3$.
2. Soit a et b deux entiers relatifs. Montrer que 3 divise $a^3 + b^3$ si et seulement si 3 divise $(a + b)^3$.

Exercice XXIII.10

1. Déterminer tous les entiers n strictement supérieurs à 1 tels que $n - 1$ divise $2n + 10$.
2. Déterminer les entiers relatifs n tels que $6n + 5$ soit divisible par $2n - 1$.
3. Déterminer les entiers relatifs n tels que $3n + 7$ divise $5n + 15$.
4. Déterminer les points à coordonnées entières de la courbe d'équation $y = \frac{x + 18}{x + 4}$.

Exercice XXIII.11

1. Soit n un entier naturel. Simplifier : $(3n + 5)(n + 2) - (8n^2 + 3n - 1)$.
2. En déduire les entiers naturels n tels que $n + 2$ divise $3n^2 + 5n + 8$.
3. En déduire les entiers relatifs n tels que $n^2 + 2$ divise $3n^4 + 5n^2 + 8$.

Exercice XXIII.12

1. Soit d et n deux entiers naturels non nuls. Montrer que si d divise à la fois $a = 2n + 6$ et $b = 3n + 8$, alors d divise un entier positif indépendant de n que l'on déterminera.
2. En déduire les valeurs possibles de d , et les valeurs de n correspondantes.

Exercice XXIII.13

On dit que deux entiers sont **premiers entre eux** lorsque leur seul diviseur commun positif est 1.

1. Montrer que, pour tout entier relatif n , $14n + 3$ et $5n + 1$ sont premiers entre eux.
2. En est-il de même pour $a = 6n + 4$ et $b = 8n + 5$?

Séquence XXIII – Arithmétique (partie 2)

Division euclidienne



Exercice XXIII.14

Effectuer la division euclidienne de 43 par 7, de 9 par 23, de 2491 par 47 et enfin de 547 par 17.



Exercice XXIII.15

On considère l'égalité $38\,367 = 152 \times 251 + 215$.

- Est-ce la traduction de la division euclidienne de 38367 par 152 ?
- Est-ce la traduction de la division euclidienne de 38367 par 251 ?
- Si ce n'est pas le cas, indiquer la division euclidienne correcte.



Exercice XXIII.16

Soit a et b deux entiers strictement positifs. La division euclidienne de a par b a pour quotient 7 et pour reste 24. Déterminer le reste de la division euclidienne de a par 7.



Exercice XXIII.17

L'entier n étant strictement positif, effectuer la division euclidienne de $(n + 3)^2$ par $n + 6$.



Exercice XXIII.18

1. Déterminer les diviseurs positifs de 12.
2. Par quels entiers naturels faut-il diviser 12 pour que le quotient soit égal au reste ?



Exercice XXIII.19

Deux entiers naturels ont une différence égale à 538. La division euclidienne du plus grand par le plus petit a pour quotient 13 et pour reste 34. Déterminer ces deux nombres.



Exercice XXIII.20

Déterminer s'il existe deux nombres entiers positifs a et b dont le produit est égal à 203 et tels que la division euclidienne de a par b a pour quotient 3 et pour reste 8.



Exercice XXIII.21

En divisant 219 par un certain entier b strictement positif, on obtient comme reste 10, et en divisant 204 par ce même nombre b , on obtient 6 comme reste. Déterminer la valeur de b .



Exercice XXIII.22

Existe-t-il des entiers naturels n tels que le quotient dans la division de 36 par n est égal au double du reste ? Si oui, lesquels ?



Exercice XXIII.23

Effectuer la division euclidienne de -324 par 15.

Séquence XXIII – Arithmétique (partie 2)

Congruences

Exercice XXIII.24

Est-il vrai que :

1. Si n est un entier tel que 7 divise $n + 4$, alors $n \equiv 3[7]$?
2. Si a est un entier tel que $a + 5 \equiv 0[12]$, alors il existe un entier k tel que $a = 17 - 12k$?

Exercice XXIII.25

Les congruences suivantes sont-elles exactes ?

$$36 \equiv 15[7] ; -53 \equiv 17[7]$$
$$23 \equiv -17[6] ; 52 \equiv -13[3]$$

Exercice XXIII.26

Déterminer les entiers naturels n vérifiant :

$$14 \equiv 2n[n].$$

Exercice XXIII.27

Soient a , b et c trois entiers relatifs vérifiant :

$$a \equiv 353[7], \quad b \equiv -71[7] \quad \text{et} \quad c \equiv 943[7]$$

1. Préciser les restes des divisions euclidiennes de ces trois nombres par 7.
2. En déduire les restes des divisions euclidiennes par 7 de : $d = 2a + 3b - 4c$, $e = a \times b \times c$ et $f = a^2 + b^3 - c^2$.

Exercice XXIII.28

Est-il vrai que :

1. Si les entiers a et b vérifient $a \times b \equiv 5[25]$, alors $a^2 \times b^2 \equiv 25[25]$?
2. Si les entiers a et b vérifient $a \times b \equiv 6[36]$, alors $a^2 + b^2 \equiv 36[36]$?

Exercice XXIII.29

Montrer que $2018^{2019} + 1$ est divisible par 17.

Exercice XXIII.30

1. Montrer que, pour tout entier n , $n(n+1)(n+2)$ est un multiple de 6.
2. Montrer de même que, pour tout entier n , $n(n^2 + 5)$ est divisible par 3.

Exercice XXIII.31

1. Soit n un entier relatif. Préciser, sous forme de tableau, le reste de la division euclidienne de n^2 par 4 selon le reste de la division euclidienne de n par 4.
2. En considérant la congruence modulo 4, prouver que l'équation $x^2 + y^2 = 3942$ n'a pas de solutions entières.

Exercice XXIII.32

1. Soit n un entier. Faire la liste des restes de la division euclidienne de n^3 par 9 en fonction du reste de la division euclidienne de n par 9.
2. En déduire que la somme des cubes de trois entiers consécutifs est toujours divisible par 9.

Exercice XXIII.33

1. Montrer que si un entier positif n n'est pas divisible par 3, alors $n^2 - 1$ est divisible par 3.
2. En déduire que si trois entiers positifs sont les longueurs respectives des côtés d'un triangle rectangle, alors au moins l'un de ces trois nombres est divisible par 3.

Exercice XXIII.34

1. Montrer que, pour tout entier naturel n , $2^{n+1} \times 5^{2n} + 64^n$ est multiple de 7.
2. Montrer que, pour tout entier naturel n , $3^{2n+1} + 2^{6n} - 7^{2n} \times 2^8$ est divisible par 5.

Exercice XXIII.35

1. Déterminer la plus petite valeur strictement positive de l'entier a telle que $a^2 \equiv 1[5]$.
2. Soit n un entier positif. Préciser, sous forme de tableau, le reste de la division euclidienne de 2^n par 5 pour les valeurs de n entre 0 et 10.
3. Déterminer le reste de la division euclidienne de 2^n par 5 selon les valeurs de n .
4. Préciser alors le reste de la division euclidienne par 5 des entiers suivants : 2^{17} , 2^{312} , 2^{514} et 2^{78315} .
5. En déduire le reste de la division euclidienne par 5 de $2^{514} \times 9^{17}$, puis de $3^{564} \times 7^{8315}$.

Exercice XXIII.36

Montrer que, pour tout entier positif a , a^5 a même chiffre des unités que celui de a .