

$$\begin{aligned}\Delta_y &= [80z + 8(k+2)]^2 - 4 \times 17 \times [101z^2 + (20k+46)z + (k+2)^2 - 4] \\ &= [80z + 8(k+2)]^2 - 68[101z^2 + (20k+46)z + (k+2)^2 - 4]\end{aligned}$$

En développant :

$$\begin{aligned}
\Delta_y &= 6400z^2 + 1280z(k+2) + 64(k+2)^2 \\
&\quad - 6868z^2 - 68(20k+46)z - 68(k+2)^2 + 272 \\
&= -468z^2 + [1280(k+2) - 68(20k+46)]z - 4(k+2)^2 + 272 \\
&= -468z^2 + [1280k + 2560 - 1360k - 3128]z - 4(k+2)^2 + 272 \\
&= -468z^2 + (-80k - 568)z - 4(k+2)^2 + 272 \\
&= -468z^2 - 8(10k+71)z - 4(k+2)^2 + 272 \\
&= -4[117z^2 + 2(10k+71)z + (k+2)^2 - 68]
\end{aligned}$$

Pour que l'équation (E) admette des solutions, il faut qu'il existe un z tel que $\Delta_y \geq 0$, c'est-à-dire :

$$117z^2 + 2(10k+71)z + (k+2)^2 - 68 \leq 0$$

Cette inégalité possède des solutions en z si et seulement si le discriminant de cette équation du second degré en z est positif ou nul. Posons $f(z) = 117z^2 + 2(10k+71)z + (k+2)^2 - 68$.

On cherche à déterminer le signe de $f(z)$.

$$\begin{aligned}
\Delta &= [2(10k+71)]^2 - 4 \times 117 \times [(k+2)^2 - 68] \\
&= 4(10k+71)^2 - 468[(k+2)^2 - 68] \\
&= 4(10k+71)^2 - 468(k+2)^2 + 468 \times 68 \\
&= 4(100k^2 + 1420k + 5041) - 468(k^2 + 4k + 4) + 31824 \\
&= 400k^2 + 5680k + 20164 - 468k^2 - 1872k - 1872 + 31824 \\
&= -68k^2 + 3808k + 50116 \\
&= -4(17k^2 - 952k - 12529) \\
&= -68(k^2 - 56k - 737)
\end{aligned}$$

Pour déterminer le signe de $f(z)$, il faut connaître le signe de Δ .

Pour cela, déterminons le signe de $k^2 - 56k - 737 = 0$:

$$\begin{aligned}
\Delta' &= 56^2 - 4(1)(-737) \\
&= 3136 + 2948 = 6084 \\
&= 4 \times 1521 \\
&= (2 \times 39)^2 \\
&= 78^2
\end{aligned}$$

D'où :

$$k_1 = \frac{56-78}{2} = -11 \quad \text{et} \quad k_2 = \frac{56+78}{2} = 67$$

x	$-\infty$	-11	67	$+\infty$	
$k^2 - 56k - 737$	$+$	0	$-$	0	$+$
Δ	$-$	0	$+$	0	$-$

L'équation (E) admet des solutions si et seulement si $\Delta \geq 0$, i.e. $k^2 - 56k - 737 \leq 0$, autrement dit $(k+11)(k-67) \leq 0$. En conclusion :

- Si $(k+11)(k-67) < 0$, i.e. $-11 < k < 67$: l'intersection est un **cercle**
- Si $(k+11)(k-67) = 0$, i.e. $k = -11$ ou $k = 67$: l'intersection est réduite à **un seul point**
- Si $(k+11)(k-67) > 0$, i.e. $k < -11$ ou $k > 67$: l'intersection est **vide**