

Séquence XXII – Géométrie dans l'espace (partie 2)

Exercice 1

Soit $ABCD$ un carré de centre O et I le milieu de $[AB]$. On pose $AB = 1$ cm.
Déterminer les réels :

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC}, \quad \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD}, \quad \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}, \quad \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{DO}, \\ \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OC}, \quad \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BD}, \quad \overrightarrow{OI} \cdot \overrightarrow{BC} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{AO} \cdot \overrightarrow{BC}$$

Exercice 2

Soit ABC un triangle équilatéral de côté a et I le milieu de $[BC]$. Exprimer, en fonction de a , les produits scalaires :

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}, \quad \overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{CA}, \quad \overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{AI} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{IA} \cdot \overrightarrow{BC}$$

Exercice 3

Théorèmes de la médiane :

Soient A et B deux points du plan et I le milieu du segment $[AB]$.

- a) Montrer que, pour tout point M du plan :
 $MA^2 + MB^2 = 2\overrightarrow{MI} \cdot \overrightarrow{BA}$
et $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = MI^2 - IA^2$
- b) Traduire géométriquement la nullité de chaque membre des égalités et en déduire des propriétés connues concernant certains triangles.

Exercice 4

Soit ABC un triangle isocèle rectangle en A .
Soient I et J les points définis par $\overrightarrow{AI} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AJ} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$ et K le milieu de $[IC]$. Démontrer que les droites (AK) et (JB) sont perpendiculaires.

Exercice 5

$ABCD$ est un tétraèdre régulier d'arête a .
Soit J le milieu de $[BC]$ et K celui de $[AD]$.
Calculer $\overrightarrow{CB} \cdot \overrightarrow{AD}$, puis $\overrightarrow{AJ} \cdot \overrightarrow{CK}$ en fonction de a .

Exercice 6

Soit $A(1; 1; 1)$, $B(2; 0; -2)$ et $C(1; -2; 2)$.

- a) Montrer que le triangle ABC est un triangle rectangle
- b) Est-il isocèle ?
- c) Déterminer une mesure (en degré) des angles $\widehat{ABC}$ et $\widehat{ACB}$.

Exercice 7

- a) Déterminer un vecteur $\vec{w}$ non nul, orthogonal simultanément aux vecteurs $\vec{u}$, de coordonnées $(1; 0; 5)$, et $\vec{v}$, de coordonnées $(-1; 1; 2)$.
- b) Déterminer les vecteurs unitaires (*c'est-à-dire* de norme 1) vérifiant cette propriété.

Exercice 8

$$\text{Soient } (\mathcal{D}) : \begin{cases} x = t \\ y = t + 4 \\ z = 2t - 5 \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$$

$$\text{et } (\mathcal{D}') : \begin{cases} x = u - 1 \\ y = -3u \\ z = u + 3 \end{cases} \quad u \in \mathbb{R}$$

Les droites $(\mathcal{D})$ et $(\mathcal{D}')$ sont-elles orthogonales ?
Sont-elles perpendiculaires ?

Exercice 9

Soit $A(5; -5; 3)$, $B(-1; -2; -1)$ et $C(8; 5; 6)$

- a) Montrer que A , B et C déterminent un plan.
- b) Déterminer un vecteur normal au plan (ABC) .
- c) Déterminer une équation du plan (ABC) .

Exercice 10

Soit $(\mathcal{D})$ et $(\mathcal{D}')$ deux droites de vecteurs directeurs respectifs $\vec{u}$ et $\vec{u}'$, et $(\mathcal{P})$ et $(\mathcal{P}')$ deux plans de vecteurs normaux respectifs $\vec{n}$ et $\vec{n}'$.
Caractériser grâce aux vecteurs le parallélisme et l'orthogonalité des droites et des plans.

Exercice 11

Donner un point et un vecteur normal des plans d'équations : $(\mathcal{P}) : 2x - 6y + 2z - 7 = 0$;
 $(\mathcal{P}') : 2z - y = 0$ et $(\mathcal{P}'') : x = 5 - 3z$.

Exercice 12

Soit a un réel fixé. Soit la droite $(\mathcal{D})$ de représentation paramétrique $\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 2 - 3t \\ z = 3 + 4t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$
et le plan $(\mathcal{P})$ d'équation cartésienne $x + ay + 2z = 9$

- a) Déterminer a pour que $(\mathcal{D})$ soit parallèle à $(\mathcal{P})$.
 $(\mathcal{D})$ est-elle incluse dans $(\mathcal{P})$?
- b) Déterminer a pour que $(\mathcal{D}) \perp (\mathcal{P})$.

Exercice 13

Déterminer et caractériser l'intersection des plans (P) et (P') d'équations respectives :

$$x - 3y + 2z = 5 \quad \text{et} \quad 2x + y + 7z = 1$$

Exercice 14

Déterminer l'intersection des trois plans d'équations respectives $x - 2y + z - 1 = 0$; $2x + y - 3z + 4 = 0$ et $x - 3y + z = 2$

Exercice 15

■ DÉFINITION :

Si A et B sont deux points distincts de l'espace. On appelle **plan médiateur du segment $[AB]$** le plan passant par I milieu de $[AB]$ et perpendiculaire à (AB) .

Déterminer une équation du plan médiateur du segment $[AB]$ où $A(0 ; 1 ; 2)$ et $B(-1 ; 0 ; 1)$.

Exercice 16

■ PROPRIÉTÉ :

Le plan médiateur de $[AB]$ est l'ensemble des points M de l'espace vérifiant $MA = MB$.

Déterminer une équation cartésienne du plan médiateur de $[CD]$ avec $C(1 ; 2 ; 3)$ et $D(0 ; 1 ; 2)$.

Exercice 17

Soit m un réel fixé. Montrer que l'équation :

$$mx + (m + 1)y + z - 1 = 0$$

est l'équation d'un plan (P) perpendiculaire au plan (P') d'équation : $x - y + z = 0$ et passant par le point $A(1 ; -1 ; 2)$.

Exercice 18

Soit a un réel fixé. Soient les plans d'équations respectives $-4x + 2y + az = 5$ et $ax - 3y - 9z = -11$.

- Déterminer a pour que les deux plans soient parallèles.
- Déterminer a pour que les deux plans soient perpendiculaires.

Exercice 19

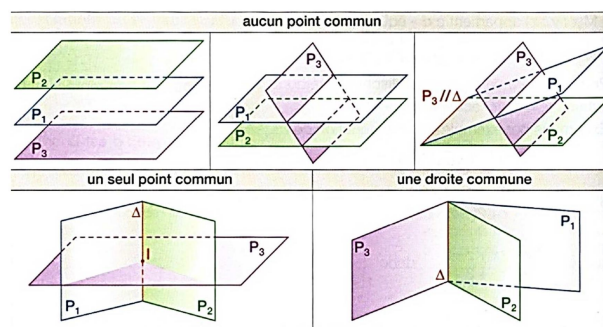
La résolution d'un système linéaire de deux équations à deux inconnues, c'est-à-dire de la forme $\begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases}$ où a, b, c, a', b' et c' sont des réels, peut s'interpréter comme la recherche de l'intersection de deux droites du plan définies par leurs équations cartésiennes : un tel système possède donc, selon la position relative de ces deux droites, ou bien une solution unique (si elles sont sécantes), ou bien aucune solution (si elles sont strictement parallèles), ou bien une droite de solutions (si elles sont confondues).

De même, la résolution d'un système linéaire de trois équations à trois inconnues, c'est-à-dire de la

forme $\begin{cases} ax + by + cz = d \\ a'x + b'y + c'z = d' \\ a''x + b''y + c''z = d'' \end{cases}$ peut s'interpréter

comme la recherche de l'intersection de trois plans dans l'espace définis par leurs équations cartésiennes.

Or, les positions relatives de trois plans peuvent se classer de la façon suivante, en fonction de leur intersection :



Il s'agit dans cet exercice de résoudre les systèmes donnés de la manière la plus rapide possible en reconnaissant une des interprétations ci-dessus. Si cette interprétation n'est pas évidente *a priori*, l'effectuer après résolution.

$$(\mathcal{S}_1) \begin{cases} x - 2y + z = 1 \\ x + 3y + 6z = 1 \\ xy + y = 1 \end{cases} \quad (\mathcal{S}_5) \begin{cases} x - 2y + z = 1 \\ x + 3y + 6z = 1 \\ y + z = 0 \end{cases}$$

$$(\mathcal{S}_2) \begin{cases} -x + y + 3z = 4 \\ x + y + z = 5 \\ 2x - 2y - 6z = 7 \end{cases}$$

$$(\mathcal{S}_3) \begin{cases} x - y + 3z = 8 \\ 2x - y - 4z = -12 \\ x + y - z = 0 \end{cases}$$

$$(\mathcal{S}_4) \begin{cases} x - 2y + 6z = 8 \\ -2x + 4y - 12z = 1 \\ \frac{3}{2}x - 3y + 9z = 0 \end{cases}$$

Séquence XXII – Géométrie dans l'espace (partie 2)

Produit vectoriel

Exercice 20

L'espace est muni d'un repère orthonormal $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ de sens direct.

- En utilisant la définition du produit vectoriel, donner la valeur de chacun des produits vectoriels suivants :

(a) $\vec{i} \wedge \vec{i}$	(d) $\vec{j} \wedge \vec{i}$	(g) $\vec{k} \wedge \vec{i}$
(b) $\vec{i} \wedge \vec{j}$	(e) $\vec{j} \wedge \vec{j}$	(h) $\vec{k} \wedge \vec{j}$
(c) $\vec{i} \wedge \vec{k}$	(f) $\vec{j} \wedge \vec{k}$	(i) $\vec{k} \wedge \vec{k}$

- Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs de l'espace de coordonnées :

$$\vec{u} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \text{ et } \vec{v} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$$

- Développer et, en utilisant la question 1, simplifier l'expression :

$$(x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}) \wedge (x'\vec{i} + y'\vec{j} + z'\vec{k})$$

- Déduire de la question précédente les coordonnées de $\vec{w} = \vec{u} \wedge \vec{v}$.

Exercice 21

$(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ est un repère orthonormal direct de l'espace. On considère les vecteurs

$$\vec{u} \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \text{ et } \vec{v} \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Le produit vectoriel $\vec{u} \wedge \vec{v}$ est :

$$A : \vec{w} \begin{pmatrix} -6 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} \quad B : \vec{0} \quad C : \vec{w} \begin{pmatrix} 2 \\ 10 \\ 8 \end{pmatrix}$$

Exercice 22

$(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$ est un repère orthonormal direct de l'espace. On considère les vecteurs

$$\vec{u} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ et } \vec{v} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

La norme du produit vectoriel $\vec{u} \wedge \vec{v}$ est

$$A : \sqrt{2} \quad B : 2\sqrt{2} \quad C : 4$$

Exercice 23

On donne les vecteurs

$$\vec{u} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \vec{v} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \vec{w} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

- Déterminer les coordonnées de $\vec{d} = \vec{u} \wedge \vec{v}$.
- En utilisant le produit scalaire :
 - Vérifier que $\vec{d}$ est orthogonal à $\vec{u}$ et à $\vec{v}$.
 - Déterminer une mesure de l'angle $(\vec{u}; \vec{v})$ arrondi au radians près.
 - Vérifier que l'on a bien :

$$\|\vec{d}\| = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \sin(\vec{u}; \vec{v})$$

- Calculer $\vec{v} \wedge \vec{u}$.
 - A-t-on $\vec{u} \wedge \vec{v} = \vec{v} \wedge \vec{u}$? Si oui, le prouver, sinon rectifier l'égalité.
- Calculer $(\vec{u} + \vec{v}) \wedge \vec{w}$.
 - Calculer $\vec{u} \wedge \vec{w} + \vec{v} \wedge \vec{w}$.
 - Quelle propriété est illustrée par les deux questions précédentes ?
- Calculer $\vec{u} \wedge (\vec{v} \wedge \vec{w})$.
 - Calculer $(\vec{u} \wedge \vec{v}) \wedge \vec{w}$.
 - Quelle propriété usuelle n'est pas respectée par le produit vectoriel ?
- Vérifier que l'on a bien l'**égalité de Lie**, à savoir :

$$\vec{u} \wedge (\vec{v} \wedge \vec{w}) + \vec{w} \wedge (\vec{u} \wedge \vec{v}) + \vec{v} \wedge (\vec{w} \wedge \vec{u}) = \vec{0}$$

Exercice 24

Dans l'espace rapporté à une repère orthonormal de sens direct $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ et d'unité le centimètre, on considère les points

$$A(2; -2; 3); B(4; -6; -1) \text{ et } C(0; -1; 5)$$

- Déterminer les coordonnées de $\vec{AB}$ et $\vec{AC}$.
- Calculer les coordonnées du vecteur $\vec{AB} \wedge \vec{AC}$.
- Déterminer la valeur approchée à 10^{-1} près de l'aire en cm^2 du triangle ABC .

Exercice 25

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormal de sens direct $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ et d'unité le centimètre, on considère les points

$$A(4; 5; 0); B(6; 8; 3); C(2; 7; 4) \text{ et } D(0; 4; 1)$$

- (a) Démontrer que le quadrilatère $ABCD$ est un parallélogramme.
(b) Calculer le produit scalaire $\vec{AB} \cdot \vec{AD}$ et les longueurs AB et AD . En déduire la mesure en degré, à 0,1 près, de l'angle géométrique $\widehat{BAD}$.
- (a) Calculer les coordonnées de $\vec{AB} \wedge \vec{AD}$.
(b) En déduire l'aire du parallélogramme $ABCD$.

Exercice 26

L'espace est muni d'un repère orthonormal $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ de sens direct. On considère les points $A(0; 0; 1)$, $B(2; 0; 0)$ et $C(0; 2; 2)$.

- Faire une figure en perspective cavalière.
- Écrire les coordonnées de $\vec{AB}$, $\vec{AC}$ et $\vec{BC}$.
- (a) Donner les valeurs exactes des distances AB , AC et BC .
(b) Quelle est la nature du triangle ABC ?
- (a) Calculer le produit scalaire $\vec{AB} \cdot \vec{AC}$.
(b) En déduire une valeur approchée arrondie à 10^{-1} près de l'angle $\widehat{BAC}$.
- (a) Calculer le produit vectoriel $\vec{AB} \wedge \vec{AC}$.
(b) En déduire l'aire S du triangle ABC .
(c) Donner une valeur approchée en degrés à 10^{-1} de S .
(d) On note D le point tel que $\vec{AD} = \vec{AB} \wedge \vec{AC}$. Démontrer que les coordonnées du point D sont $(2; -2; 5)$.
(e) Placer le point D sur la figure.
- On désigne par $\mathcal{V}$ le volume de la pyramide $DABC$. Démontrer que $\mathcal{V} = 4$.

Exercice 27

Le plan est muni d'un repère orthonormal $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ de sens direct. On considère les points $A(2; 1; 0)$, $B(-3; 2; 3)$ et $C(1; -2; 1)$.

- Calculer les coordonnées des vecteurs $\vec{AB}$, $\vec{AC}$ et $\vec{BC}$.
- Calculer les distances AB , AC et BC .
- Calculer le produit scalaire $\vec{AB} \cdot \vec{AC}$.
- Déduire de ce qui précède une valeur approchée arrondie à 10^{-1} près de l'angle $\widehat{BAC}$.
- (a) Calculer le produit vectoriel $\vec{AB} \wedge \vec{AC}$.
(b) En déduire l'aire S du triangle ABC .
(c) Donner une valeur approchée à 10^{-1} de S .

Exercice 28

On considère un cube $AMBONPQC$ que l'on munit du repère orthonormal de sens direct $(O; \vec{OA}, \vec{OB}, \vec{OC})$.

- (a) Donner les coordonnées des points O , A , B , M , C , N , P et Q .
(b) Déterminer les coordonnées des vecteurs $\vec{AB}$, $\vec{AC}$ et $\vec{AP}$.
- (a) Calculer les coordonnées du produit vectoriel $\vec{u} = \vec{AB} \wedge \vec{AC}$.
(b) Calculer le produit scalaire $s = \vec{AP} \cdot \vec{u}$.
(c) On admet que le volume V du tétraèdre $ABCP$ est $V = \frac{s}{6}$. Calculer le volume V .
- Soit $I(x; y; z)$ le pied de la hauteur $[IP]$ du tétraèdre $ABCP$.
(a) On admet que les vecteurs $\vec{IP}$ et $\vec{AB}$ sont orthogonaux. En déduire que $x = y$.
(b) On admet que les vecteurs $\vec{IP}$ et $\vec{AC}$ sont orthogonaux. En déduire que $x = z$.
(c) On admet que le point I étant dans le plan (ABC) , ses coordonnées vérifient

$$x + y + z = 1$$

Déduire des questions précédentes les coordonnées du point I .

- (d) Montrer que

$$\vec{IA} + \vec{IB} + \vec{IC} = \vec{0}$$

- (e) Que représente le point I pour le triangle ABC ?

Exercice 29

L'espace étant muni d'un repère orthonormal $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ d'unité 1cm, on considère les points :

$$A(4; 1; 2) B(3; 1; 3) C(2; 2; 3) D(2; 3; 2) E(3; 3; 1) F(4; 2; 2)$$

- Montrer que les segments $[AD]$, $[BE]$ et $[CF]$ ont même milieu I .
- (a) Calculer le produit vectoriel $\vec{u} = \overrightarrow{IA} \wedge \overrightarrow{IB}$.
(b) Montrer que ce vecteur $\vec{u}$ est colinéaire à $\overrightarrow{IS}$.
(c) En déduire que la droite (IS) est perpendiculaire au plan déterminé par les droites (AD) et (BE) .
- (a) Calculer le produit scalaire $\overrightarrow{IS} \cdot \overrightarrow{CF}$.
(b) En déduire que les points A , B , C , D , E et F sont coplanaires.
- Montrer que les points A , B , C , D , E et F sont les sommets d'un hexagone régulier.
- Calculer l'aire de cet hexagone.

Exercice 30

Le plan $\mathcal{P}$ est rapporté à un repère orthonormal $(O; \vec{i}, \vec{j})$, d'unité graphique 1cm. On considère les points $A(0, 2)$, $B(0, 1)$ et $M(m, m)$ où m est un réel quelconque.

- Montrer que l'ensemble des points M quand m varie est une droite dont on déterminera un point et un vecteur directeur.
- Déterminer les valeurs de m pour lesquelles le triangle ABM est rectangle en M .
- Vérifier que l'un de ces triangles est isocèle.
- L'espace est rapporté à un repère orthonormal direct $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$; le plan $(O; \vec{i}, \vec{j})$ étant le plan $\mathcal{P}$ précédemment défini.

Les points A , B , et M ont donc pour coordonnées dans le repère $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$:

$$A(0; 2; 0), \quad B(0; 1; 0) \quad \text{et} \quad M(m; m; 0)$$

Soit f la fonction qui à tout réel m associe l'aire en cm^2 du triangle ABM . On rappelle que $f(m) = \frac{\|\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AM}\|}{2}$.

- Calculer $f(m)$ en fonction de m .
- Déterminer les valeurs de m pour lesquelles l'aire du triangle ABM est égale à 4cm^2 .

Exercice 31

Les deux parties de l'exercice sont indépendantes et peuvent être traitées de façon séparées.

L'espace est rapporté à un repère orthonormal $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ de sens direct et d'unité graphique 1 cm.

On considère les points $A(1, 3, 0)$, $B(3, 1, 0)$, $C(4, 4, 0)$ et $S(4, 4, 2)$.

Partie A – Calcul du volume d'une pyramide

- (a) Déterminer les coordonnées du point D tel que $ABCD$ soit un parallélogramme.
(b) Déterminer les longueurs BC et BA ainsi que la valeur approchée arrondie à l'unité de la mesure en degré de l'angle $\widehat{BAC}$.
- (a) Déterminer le vecteur $\vec{N} = \overrightarrow{BC} \wedge \overrightarrow{BA}$.
(b) Montrer que la droite (SC) est une hauteur de la pyramide $SABCD$.
(c) Calculer la norme du vecteur $\vec{N}$. Quelle est l'aire du parallélogramme $ABCD$?
(d) Déduire des questions précédentes le volume de la pyramide $SABCD$.

Partie B – Calcul du volume d'un tronc de pyramide

On considère un plan horizontal qui coupe les arêtes $[SA]$, $[SB]$, $[SC]$ et $[SD]$ de la pyramide respectivement aux points A_1 , B_1 , C_1 , et D_1 . On note z la cote des quatre points A_1 , B_1 , C_1 , et D_1 ($0 \leq z \leq 2$).

- En écrivant que les vecteurs $\overrightarrow{SA_1}$ et $\overrightarrow{SA}$ sont colinéaires, montrer que les coordonnées du point A_1 sont $\left(\frac{2+3z}{2}; \frac{6+z}{2}; z\right)$.

On admet que les coordonnées des points B_1 et C_1 peuvent respectivement s'écrire :

$$B_1\left(\frac{6+z}{2}; \frac{2+3z}{2}; z\right) \quad \text{et} \quad C_1(4; 4; z)$$

- (a) Déterminer, en fonction de z , les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{B_1C_1} \wedge \overrightarrow{B_1A_1}$.
(b) En déduire que l'aire de la section plane $A_1B_1C_1D_1$ de la pyramide est

$$\mathcal{S}(z) = 2(2-z)^2$$

Séquence XXII – Géométrie dans l'espace (partie 2)

Exercices variés

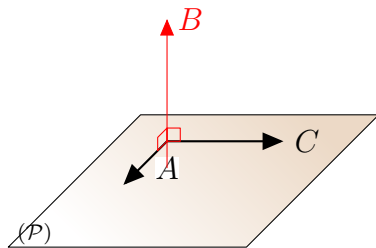
Exercice 32

Un repère orthonormal $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ de l'espace étant donné, on considère les points $A(4; 0; -3)$, $B(2; 2; 2)$, $C(3; -3; -1)$ et $D(0; 0; -3)$.

- Déterminer une équation cartésienne du plan $(\mathcal{P}_1)$ médiateur du segment $[AB]$, une équation cartésienne du plan $(\mathcal{P}_2)$ médiateur du segment $[BC]$ puis une équation cartésienne du plan $(\mathcal{P}_3)$ médiateur du segment $[CD]$.
- Montrer que les plans $(\mathcal{P}_1)$, $(\mathcal{P}_2)$ et $(\mathcal{P}_3)$ ont un unique point commun Ω dont on calculera les coordonnées. Montrer que Ω est le centre d'une sphère $(\mathcal{S})$ circonscrite au tétraèdre $ABCD$.
- Donner une équation de la sphère $(\mathcal{S})$.

Exercice 33

Un repère orthonormal $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ de l'espace étant donné, on considère les points $A(a; 0; 0)$, $B(0; b; 0)$, $C(0; 0; c)$ où a, b, c sont trois réels strictement positifs.



- Démontrer que le plan (ABC) a pour équation cartésienne : $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$.
- Donner une représentation paramétrique de la droite (Δ) passant par O et perpendiculaire au plan (ABC) .
- Déterminer les coordonnées du point H , projeté orthogonal de O sur le plan (ABC) . Vérifier que H est l'orthocentre du triangle (ABC) .
- On pose : $OH = h$.
Démontrer que : $\frac{1}{h^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}$.

Exercice 34

On considère la sphère $(\mathcal{S})$ de centre $\Omega(1; -2; 0)$ et de rayon 3, ainsi que le plan $(\mathcal{P})$ d'équation cartésienne : $x + y - 3z + 4 = 0$.

Le plan $(\mathcal{P})$ coupe-t-il la sphère $(\mathcal{S})$? $\pm\pm$ Si oui, caractériser leur intersection.

Exercice 35

L'espace est muni d'un repère orthonormal $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ de sens direct. On considère les points $A(0, 0, 1)$, $B(4, 2, 3)$ et $C(-3, 1, 1)$.

- En utilisant le produit vectoriel :
 - Justifier que les points A , B et C ne sont pas alignés.
 - Déterminer un vecteur $\vec{N}$ orthogonal aux vecteurs $\vec{AB}$ et à $\vec{AC}$.
- On considère le plan (ABC) (bien défini puisque les trois points ne sont pas alignés). Soit $M(x; y; z)$ un point du plan (ABC) .
 - Que peut-on dire des vecteurs $\vec{N}$ et $\vec{AM}$?
 - En utilisant le produit scalaire, en déduire une équation du plan (ABC) .
 - En procédant de même, déterminer une équation du plan (DEF) passant par $D(1; 7; -4)$, $E(1; 7; -6)$ et $F(7; -1; 9)$.
 - Proposez un algorithme permettant d'obtenir l'équation d'un plan à partir des coordonnées de trois points de ce plan.

Exercice 36

Soient les points $A(2, 1, 0)$, $B(-3, 2, 3)$ et $C(1, -2, -1)$.

- Déterminer les coordonnées du vecteur $\vec{AB} \wedge \vec{AC}$.
- En déduire une équation du plan (ABC) .
- Calculer l'aire du triangle ABC .
- Calculer, en degré, les mesures des angles du triangle ABC .
- Calculer les coordonnées du centre de gravité du triangle ABC .
- On rappelle que la distance δ d'un point $M(x_0, y_0, z_0)$ au plan d'équation $ax + by + cz + d = 0$ est donnée par

$$\delta = \frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

Calculer le volume du tétraèdre $OABC$.



Exercice 37

On donne les plans $\mathcal{P}_k$ d'équation

$$x - 4y + 10z + k = 0$$

où k est un réel. À quelle condition portant sur le réel k l'intersection du plan $\mathcal{P}_k$ et de la sphère $\mathcal{S}$ d'équation $x^2 + y^2 + z^2 - 4x + 6z = 0$ est-elle :

- a) vide ?
- b) réduite à un point ?
- c) un cercle ?

