

Géométrie dans l'espace (2/2)

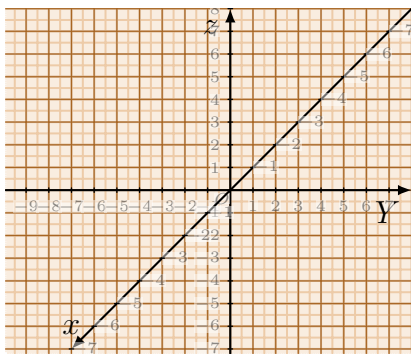
1. Quelques rappels et compléments autour des droites, plans et vecteurs de l'espace

Exemple rappel :

L'espace est muni du repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. On représentera dans le repère ci-dessous les points et droites considérés.

Soit $(\mathcal{D})$ la droite dont une représentation paramétrique est :

$$\begin{cases} x = -1 + 2t \\ y = 5t \\ z = 3 - t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$$



1. Le point $A\left(0; \frac{5}{2}; \frac{5}{2}\right)$ appartient-il à $(\mathcal{D})$?

Même question avec le point $B(-1; 0; 2)$.

$A\left(0; \frac{5}{2}; \frac{5}{2}\right) \in (\mathcal{D})$ si et seulement s'il existe

$$t \in \mathbb{R} \text{ tel que } \begin{cases} 0 = -1 + 2t \\ \frac{5}{2} = 5t \\ \frac{5}{2} = 3 - t \end{cases}, \text{ i.e. } \begin{cases} t = \frac{1}{2} \\ t = \frac{1}{2} \\ t = \frac{1}{2} \end{cases}$$

Donc A appartient à la droite $(\mathcal{D})$.

$B(-1; 0; 2)$ si et seulement s'il existe $t \in \mathbb{R}$

$$\text{tel que } \begin{cases} -1 = -1 + 2t \\ 0 = 5t \\ 2 = 3 - t \end{cases}, \text{ i.e. } \begin{cases} t = 0 \\ t = 0 \\ t = 1 \end{cases}$$

Donc B n'appartient pas à la droite $(\mathcal{D})$.

2. On considère la droite $(\mathcal{D}')$ dont une représentation paramétrique est :

$$\begin{cases} x = 4s \\ y = -2 + 10s \\ z = 1 - 2s \end{cases} \quad s \in \mathbb{R}$$

Quelle est la position relative des droites $(\mathcal{D})$ et $(\mathcal{D}')$?

Un vecteur directeur de $(\mathcal{D})$ est $\vec{u} \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ -1 \end{pmatrix}$

Un vecteur directeur de $(\mathcal{D}')$ est $\vec{u}' \begin{pmatrix} 4 \\ 10 \\ -2 \end{pmatrix}$. Donc

$\vec{u}' = 2\vec{u}$. Les vecteurs sont colinéaires, donc les droites sont parallèles. Regardons si elles sont confondues. Or, $A \in \mathcal{D}$ d'après 1., mais on montre que $A \notin (\mathcal{D}')$. Donc les droites $(\mathcal{D})$ et $(\mathcal{D}')$ sont strictement parallèles.

3. On considère la droite $(\mathcal{D}'')$ dont une représentation paramétrique est :

$$\begin{cases} x = -3 - 2r \\ y = 2 - 12r \\ z = 5 \end{cases} \quad r \in \mathbb{R}$$

Quelle est la position relative de $(\mathcal{D})$ et $(\mathcal{D}'')$?

Un vecteur directeur de $(\mathcal{D}'')$ est $\vec{u}'' \begin{pmatrix} -2 \\ -12 \\ 0 \end{pmatrix}$

Alors

$$\begin{aligned} \vec{u} \cdot \vec{u}'' &= 2 \times (-2) + 0 \times (-12) + (-1) \times 0 \\ &= -4 \\ &\neq 0 \end{aligned}$$

Les vecteurs directeurs ne sont pas orthogonaux, donc les droites ne sont pas perpendiculaires. Les vecteurs ne sont pas non plus colinéaires, donc les droites ne sont pas parallèles. Les droites sont sécantes.

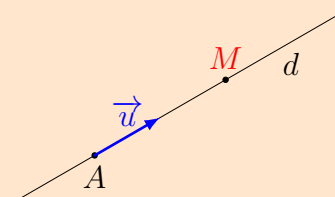
■ DÉFINITION :

Soient A un point et $\vec{u}$ un vecteur non nul.

La droite de l'espace passant par le point A et de vecteur directeur $\vec{u}$ est l'ensemble des points M de l'espace vérifiant :

$$\exists t \in \mathbb{R}, \overrightarrow{AM} = t\vec{u}$$

Cette droite se note $d(A; \vec{u})$.



■ DÉFINITION :

Dans un repère $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, si le point A a pour coordonnées $(x_A; y_A; z_A)$ et le vecteur $\vec{u}$ non nul a pour coordonnées $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$, alors $M(x; y; z)$ appartient à $d(A; \vec{u})$ si et seulement si

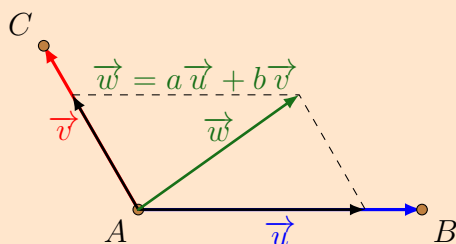
$$\begin{cases} x = x_A + at \\ y = y_A + bt \\ z = z_A + ct \end{cases}$$

C'est une **représentation paramétrique** de la droite $d(A; \vec{u})$.

■ DÉFINITION :

Soient $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ trois vecteurs de l'espace. Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires, alors les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont coplanaires.

Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas colinéaires : les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont coplanaires s'il existe un couple $(t; s) \in \mathbb{R}^2$ tel que : $\vec{w} = t\vec{u} + s\vec{v}$.



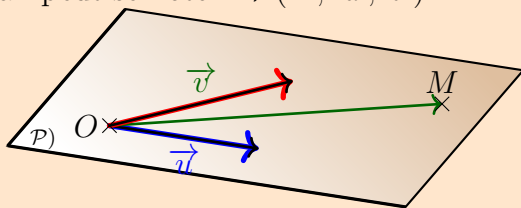
■ DÉFINITION :

Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non colinéaires et A un point de l'espace.

Le plan $(\mathcal{P})$ passant par A et de vecteurs directeurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ est l'ensemble des points M de l'espace vérifiant :

$$\exists (t; t') \in \mathbb{R}^2, \overrightarrow{AM} = t\vec{u} + t'\vec{v}$$

Ce plan peut se noter : $\mathcal{P}(A; \vec{u}, \vec{v})$.



Suite de l'exemple :

On considère le plan (OAB) qui est l'ensemble des points $M(x; y; z)$ de l'espace vérifiant : $\exists (s; t) \in \mathbb{R}^2$ tel que

$$\begin{cases} x = -s \\ y = 5t \\ z = 5t + 2s \end{cases}$$

C'est une **représentation paramétrique** du plan (OAB) .

1. Montrer que

$$M(x; y; z) \in (OAB) \Leftrightarrow 2x - y + z = 0$$

Cette équation est appelée **équation cartésienne** du plan (OAB) .

Un point $M(x; y; z)$ appartient au plan (ABC) si et seulement s'il existe des réels s et t tels que : $\overrightarrow{OM} = s\overrightarrow{OA} + t\overrightarrow{OB}$

Soient $\vec{u} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\vec{v} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$. $(\vec{u}; \vec{v})$ est un couple de vecteurs directeurs du plan (ABC)

$M \in (OAB)$ si et seulement si les vecteurs $\overrightarrow{OM}$, $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont coplanaires, c'est-à-dire s'il existe $(s; t) \in \mathbb{R}^2$ tel que

$$\overrightarrow{OM} = t\vec{u} + s\vec{v}$$

Grâce aux coordonnées, on obtient le système

$$\begin{cases} x = -s \\ y = 5t \\ z = 5t + 2s \end{cases}$$

i.e. $\begin{cases} s = -x \\ 5t = y \\ z = y - 2x \end{cases}$

i.e. $\begin{cases} s = -x \\ 5t = y \\ 2x - y + z = 0 \end{cases}$

Donc $M(x; y; z) \in (OAB) \Leftrightarrow 2x - y + z = 0$

2. On note $\vec{n}$ le vecteur de coordonnées $\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Vérifier que chacun des deux vecteurs directeurs (non colinéaires) du plan (OAB) est orthogonal au vecteur $\vec{n}$. On dit que $\vec{n}$ est un **vecteur normal** au plan (OAB) .

On sait que $\vec{u} \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 5 \end{pmatrix}$ et $\vec{v} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$.

$$\text{Donc } \vec{u} \cdot \vec{n} = 0 \times 2 + 5 \times (-1) + 5 \times 1 = 0.$$

$$\text{De même, } \vec{v} \cdot \vec{n} = -1 \times 2 + 0 \times (-1) + 2 \times 1 = 0.$$

Donc $\vec{n} \perp \vec{u}$ et $\vec{n} \perp \vec{v}$.

On déduit de la propriété précédente la distributivité du produit scalaire par rapport à l'addition des vecteurs et on a donc les règles de calcul déjà connues pour le produit scalaire dans le plan :

■ PROPRIÉTÉ :

Pour tous vecteurs de l'espace $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ et tout réel k :

- $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}$
- $\vec{u} \cdot (k\vec{v}) = (k\vec{u}) \cdot \vec{v} = k(\vec{u} \cdot \vec{v})$
- $\vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w}$

Exemples :

Dans le cube précédent, calculer en utilisant les propriétés précédentes :

$$\overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{AF}$$

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{AF} &= \overrightarrow{AE} \cdot (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BF}) = \overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{BF} \\ &= 0 + \overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{AE} = 1\end{aligned}$$

$$\overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{CH}$$

$$\begin{aligned}\overrightarrow{CH} &= \overrightarrow{AH} - \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{EH} - \overrightarrow{AC} \\ &= \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} - (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}) \\ &= \overrightarrow{AE}\end{aligned}$$

$$\text{Donc } \frac{\overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{CH}}{\overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{AG}} = \frac{\overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{AE}}{\overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{AG}} = 1$$

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AG} &= \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BG} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CG} \\ &= \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AE}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{Donc } \overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{AG} &= \overrightarrow{AE} \cdot (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AE}) \\ &= 0 + 0 + 1 \\ &= 1\end{aligned}$$

$$\overrightarrow{AG} \cdot \overrightarrow{BH}$$

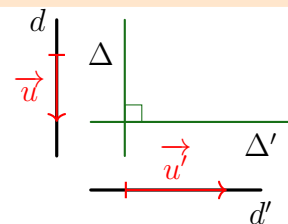
$$\begin{aligned}\overrightarrow{BH} &= \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AH} = -\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AE} \\ &= \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AE}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AG} \cdot \overrightarrow{BH} &= (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AE}) \cdot (\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AE}) \\ &= \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AD} \\ &\quad + \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{AE} \\ &= 0 + 0 + 1 + 0 + 0 + 1 = 2\end{aligned}$$

Les propriétés de l'orthogonalité vues en classe de Première se déclinent alors de la façon suivante avec le produit scalaire :

■ PROPRIÉTÉ :

Une droite $(\mathcal{D})$ de vecteur directeur $\vec{u}$ et une droite $(\mathcal{D}')$ de vecteur directeur $\vec{u}'$ sont orthogonales si et seulement si : $\vec{u} \cdot \vec{u}' = 0$.



Exemple :

Les droites $(\mathcal{D})$ et $(\mathcal{D}')$ de représentations paramétriques respectives

$$\begin{cases} x = 3 + t \\ y = -5 - 2t \\ z = -3 + 3t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R} \quad \text{et} \quad \begin{cases} x = 2k \\ y = -3 - 2k \\ z = 4 - 2k \end{cases} \quad k \in \mathbb{R}$$

sont-elles orthogonales ?

Sont-elles perpendiculaires ?

Un vecteur directeur de $(\mathcal{D})$ est $\vec{u} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$

Un vecteur directeur de $(\mathcal{D}')$ est $\vec{u}' \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix}$

$$\begin{aligned}\vec{u} \cdot \vec{u}' &= 1 \times 2 + (-2) \times (-2) + 3 \times (-2) \\ &= 2 + 4 - 6 = 0\end{aligned}$$

Les droites sont orthogonales. Pour qu'elles soient perpendiculaires, il faut qu'elles soient sécantes. Cherchons s'il existe t et k tels que les coordonnées coïncident

$$\begin{aligned}\begin{cases} 3 + t = 2k \\ -5 - 2t = -3 - 2k \\ -3 + 3t = 4 - 2k \end{cases} &\iff \begin{cases} t - 2k = -3 \\ -2t + 2k = 2 \\ 3t + 2k = 7 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} t - 2k = -3 \\ -t = -1 \quad (L_1 + L_2) \\ 3t + 2k = 7 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} t = 1 \\ -2k = -4 \quad (L_1) \\ 2k = 4 \quad (L_3 - 3L_2) \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} t = 1 \\ k = 2 \end{cases}\end{aligned}$$

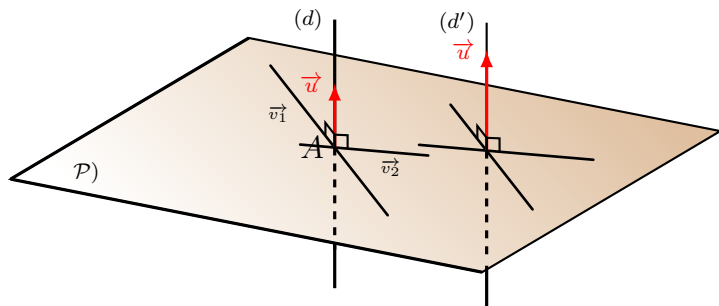
Le système admet une solution unique. Les droites sont orthogonales et sécantes, donc perpendiculaires.

■ PROPRIÉTÉ :

Une droite $(\mathcal{D})$ de vecteur directeur $\vec{u}$ est perpendiculaire à un plan $(\mathcal{P})$ de vecteurs directeurs $(\vec{v}_1; \vec{v}_2)$ si et seulement si :

$$\vec{u} \cdot \vec{v}_1 = \vec{u} \cdot \vec{v}_2 = 0$$

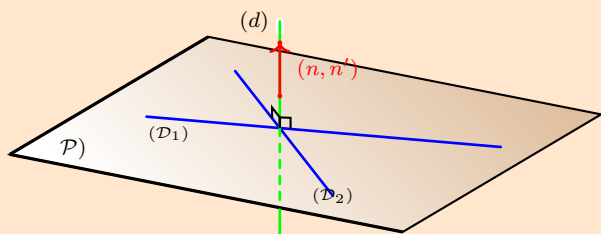
Remarque : Dans la configuration ci-dessous, on dit que le vecteur $\vec{u}$ est **normal** au plan $(\mathcal{P})$.



3. Équations cartésiennes de plan

■ DÉFINITION :

On appelle **vecteur normal à un plan** tout vecteur directeur $\vec{n}$ d'une droite perpendiculaire à ce plan.



Exemples :

1. Soit $(\mathcal{P}) = \mathcal{P}(A; \vec{u}, \vec{v})$ où $\vec{u} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ et

$\vec{v} \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$. Montrer que $\vec{n} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ est normal à $\mathcal{P}$.

$$\begin{aligned} \vec{n} \cdot \vec{u} &= 1 \times (-1) + 2 \times 2 + (-1) \times 3 \\ &= -1 + 4 - 3 = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \vec{n} \cdot \vec{v} &= 1 \times 4 + 2 \times (-2) + (-1) \times 0 \\ &= 4 - 4 + 0 = 0 \end{aligned}$$

Donc $\vec{n}$ est normal à $\mathcal{P}$.

2. Soit $\mathcal{P} = \mathcal{P}(A; \vec{u}, \vec{v})$ où $\vec{u} \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\vec{v} \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Déterminer $(a; b; c) \in \mathbb{R}^3$ tel que $\vec{n} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ soit un vecteur normal à $(\mathcal{P})$.

On résout le système :
$$\begin{cases} \vec{n} \cdot \vec{u} = 0 \\ \vec{n} \cdot \vec{v} = 0 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \vec{n} \cdot \vec{u} = 0 &\Leftrightarrow 0 \times a + (-2) \times b + 1 \times c = 0 \\ &\Leftrightarrow -2b + c = 0 \\ &\Leftrightarrow c = 2b \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \vec{n} \cdot \vec{v} = 0 &\Leftrightarrow 2a + (-3)b + 1 \times c = 0 \\ &\Leftrightarrow 2a - 3b + c = 0 \\ &\Leftrightarrow 2a - 3b + 2b = 0 \\ &\Leftrightarrow 2a - b = 0 \\ &\Leftrightarrow a = \frac{b}{2} \end{aligned}$$

On peut choisir $b = 2$, alors $a = 1$ et $c = 4$.

Donc $\vec{n} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$.

3. Soient $\vec{n} \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix}$ et un point A . Déterminer deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ non colinéaires tels que $\vec{n}$ soit un vecteur normal à $\mathcal{P} = \mathcal{P}(A; \vec{u}, \vec{v})$.

Posons $\vec{u} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ et $\vec{v} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$. On va choisir deux triplets sont proportionnels qui vérifient $\vec{u} \cdot \vec{n} = 0$ et $\vec{v} \cdot \vec{n} = 0$.

Par exemple, on peut choisir $x = 4$, $y = 0$ et $z = 3$. Donc $\vec{u} \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$.

De même, on peut choisir $x' = 0$, $y' = 4$ et $z' = 1$. Donc $\vec{v} \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$.

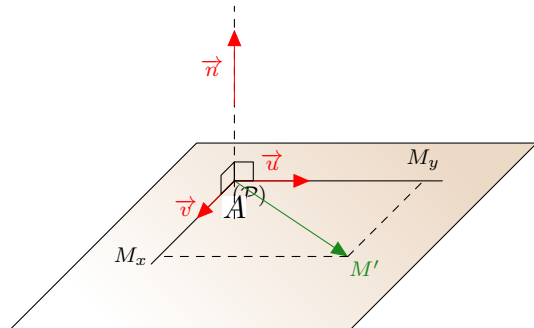
■ PROPRIÉTÉ :

Un plan est entièrement défini par la donnée d'un de ses points et d'un vecteur normal :

$$M \in \mathcal{P}(A; \vec{u}, \vec{v}) \Leftrightarrow \overrightarrow{AM} \cdot \vec{n} = 0$$

où $\vec{n} \perp \vec{u}$ et $\vec{n} \perp \vec{v}$.

Démonstration.



($\Rightarrow$) Soit M un point du plan $\mathcal{P} = \mathcal{P}(A; \vec{u}, \vec{v})$ et $\vec{n}$ un vecteur normal à ce plan. Par définition, il existe $(k; k') \in \mathbb{R}^2$ tel que $\overrightarrow{AM} = k\vec{u} + k'\vec{v}$. On en déduit que

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AM} \cdot \vec{n} &= (k\vec{u} + k'\vec{v}) \cdot \vec{n} \\ &= k\vec{u} \cdot \vec{n} + k'\vec{v} \cdot \vec{n} \\ &= 0 + 0 \\ &= 0 \end{aligned}$$

car $\vec{n}$ est normal à $\mathcal{P}$ donc orthogonal à tout vecteur de $\mathcal{P}$.

Donc si $\vec{n}$ est normal à $\mathcal{P}$ et si $M \in \mathcal{P}$, alors $\overrightarrow{AM} \cdot \vec{n} = 0$.

($\Leftarrow$) Réciproquement : supposons que M est un point de l'espace tel que $\overrightarrow{AM} \cdot \vec{n} = 0$. Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non colinéaires et orthogonaux à $\vec{n}$. Le triplet $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{n})$ forme alors une base des vecteurs de l'espace et il existe donc $(k; k'; k'') \in \mathbb{R}^3$ tel que : $\overrightarrow{AM} = k\vec{u} + k'\vec{v} + k''\vec{n}$.

Comme par hypothèse on a $\overrightarrow{AM} \cdot \vec{n} = 0$, alors : $(k\vec{u} + k'\vec{v} + k''\vec{n}) \cdot \vec{n} = 0$ d'où $k\vec{u} \cdot \vec{n} + k'\vec{v} \cdot \vec{n} + k''\vec{n} \cdot \vec{n} = 0$ et d'où par définition de $\vec{u}$ et $\vec{v}$. $k''\|\vec{n}\|^2 = 0$ donc $k''\|\vec{n}\|^2 = 0$ et puisque le vecteur $\vec{n}$ est non nul, on en déduit : $k'' = 0$.

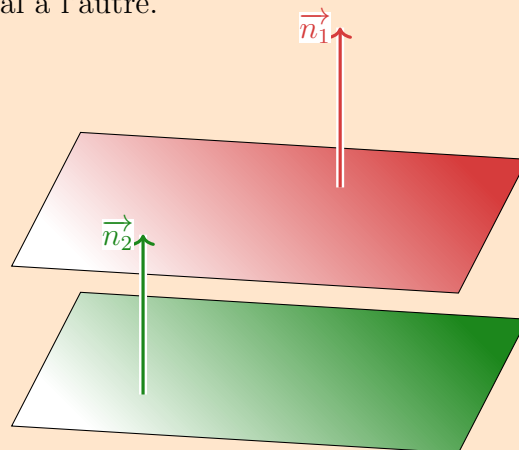
Par conséquent, $\overrightarrow{AM} = k\vec{u} + k'\vec{v}$ et donc $M \in \mathcal{P}(A; \vec{u}, \vec{v})$. Ainsi si $\overrightarrow{AM} \cdot \vec{n} = 0$ alors M appartient à un plan défini par le point A et le vecteur normal $\vec{n}$.

□

Remarque : La notion de vecteur normal à un plan est souvent d'un usage plus commode que celle de vecteurs directeurs (c'est-à-dire d'une base) de ce plan.

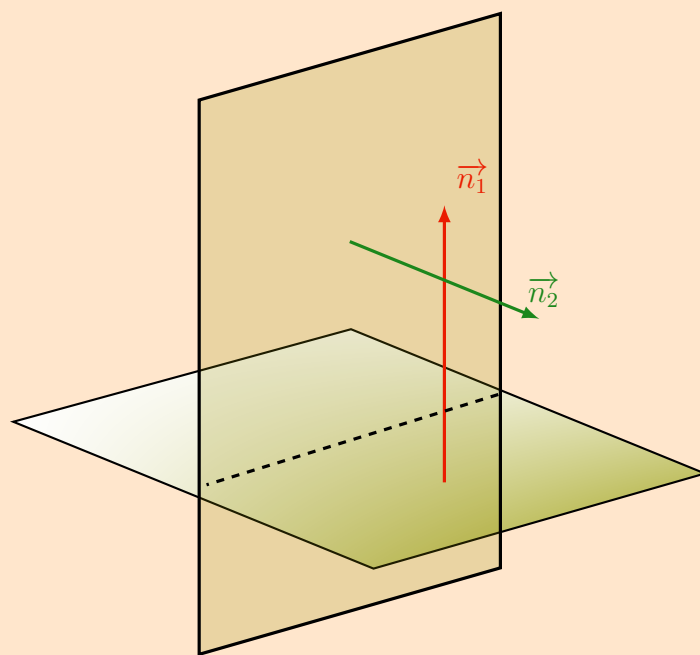
■ PROPRIÉTÉ :

Deux plans sont parallèles si et seulement si un vecteur normal à l'un est colinéaire à un vecteur normal à l'autre.



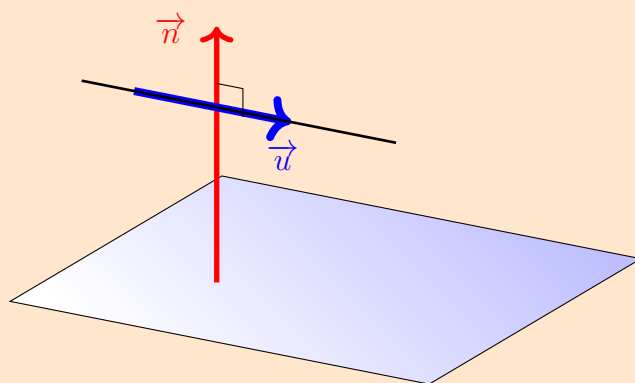
■ PROPRIÉTÉ :

Deux plans sont perpendiculaires si et seulement si un vecteur normal à l'un est orthogonal à un vecteur normal à l'autre.



■ PROPRIÉTÉ :

Une droite est parallèle à un plan si et seulement si un de ses vecteurs directeurs est orthogonal à un vecteur normal à ce plan.



Ces considérations amènent naturellement à privilégier un autre type de représentation de plan, liée à la notion de vecteur normal : l'équation cartésienne d'un plan.

■ THÉORÈME :

Soit $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ un repère orthonormal.

- (i) Tout plan $\mathcal{P}$ admet une équation dite **cartésienne**, de la forme : $ax + by + cz + d = 0$ où $(a; b; c) \neq (0; 0; 0)$.
- (ii) L'ensemble des points M de coordonnées $(x; y; z)$ vérifiant : $ax + by + cz + d = 0$ où $(a; b; c) \neq (0; 0; 0)$ est un plan dont un vecteur normal a pour coordonnées $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$

Démonstration. (i) Soit $\mathcal{P}$ un plan et A un point de ce plan. On a vu plus haut que le plan $\mathcal{P}$ est défini par le point A et un vecteur normal $\vec{n}(a; b; c)$. Alors

$$\begin{aligned} M(x; y; z) \in \mathcal{P} \\ \iff \overrightarrow{AM} \cdot \vec{n} &= 0 \\ \iff a(x - x_A) + b(y - y_A) + c(z - z_A) &= 0 \\ \iff ax + by + cz + d &= 0 \\ \text{où } d &= -(ax_A + by_A + cz_A) \end{aligned}$$

Donc le plan $\mathcal{P}$ admet bien une équation de la forme $ax + by + cz + d = 0$.

- (ii) Soit $(\mathcal{E})$ l'ensemble des points $M(x; y; z)$ tel que $ax + by + cz + d = 0$. Comme le triplet $(a; b; c)$ n'est pas $(0; 0; 0)$, au moins l'un des réels a, b ou c n'est pas nul : supposons (sans perdre de généralité) que $a \neq 0$. Alors le point A de coordonnées $\left(-\frac{d}{a}; 0; 0\right)$ est un point de l'ensemble $(\mathcal{E})$.

Donc $ax_A + by_A + cz_A + d = 0$.

Par différence des deux équations de $\begin{cases} ax + by + cz + d = 0 \\ ax_A + by_A + cz_A + d = 0 \end{cases}$

On en déduit $a(x - x_A) + b(y - y_A) + c(z - z_A) = 0$
On peut réécrire cette équation sous la forme

$$\overrightarrow{AM} \cdot \vec{n} = 0 \text{ où } \vec{n} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}.$$

Or $\overrightarrow{AM} \cdot \vec{n} = 0 \iff M(x; y; z) \in \mathcal{P}$ où $\mathcal{P}$ est le plan passant par A et de vecteur normal $\vec{n}$.

Donc l'ensemble des points $M(x; y; z)$ tel que $ax + by + cz + d = 0$ est bien un plan de vecteur normal $\vec{n} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$.

□

Remarque :

- En pratique, pour trouver une équation cartésienne de plan, on cherche un vecteur normal à ce plan (voir la partie 4) et on effectuera un calcul analogue à celui de la preuve de l'assertion (i).
- Une équation cartésienne d'un plan fournit instantanément les coordonnées d'un vecteur normal à ce plan.
- On notera qu'une équation cartésienne de plan n'est pas unique : on peut multiplier chacun de ses membres par tout réel non nul.
- On notera également qu'une sphère admet une équation de la forme $x^2 + y^2 + z^2 + ax + by + cz + d = 0$ mais que, réciproquement, une telle équation n'est pas forcément une équation de sphère.

A contrario, tout plan admet une équation de la forme $ax + by + cz + d = 0$ et toute équation de cette forme où $(a; b; c) \neq (0; 0; 0)$ est une équation de plan.

Exemples :

- Soit $A(0; 1; -2)$, $B(3; -1; 4)$ et $C(-1; 0; 3)$.
(a) Vérifier que les points A, B et C définissent un unique plan.

$\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 6 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC} \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix}$. Ces vecteurs ne sont pas colinéaires, donc ces trois points définissent bien un unique plan.

- (b) Trouver les coordonnées $(a; b; c)$ d'un vecteur $\vec{n}$ orthogonal à $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.

On résout le système

$$\begin{aligned} \begin{cases} \vec{n} \cdot \overrightarrow{AB} = 0 \\ \vec{n} \cdot \overrightarrow{AC} = 0 \end{cases} &\iff \begin{cases} 3a - 2b + 6c = 0 \\ -a - b + 5c = 0 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} 3a - 2b + 6c = 0 \\ a = -b + 5c \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} 3(-b + 5c) - 2b + 6c = 0 \\ a = -b + 5c \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} -5b + 21c = 0 \\ a = -b + 5c \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} b = \frac{21c}{5} \\ a = \frac{4c}{5} \end{cases} \end{aligned}$$

On peut prendre $c = 5$, et alors $a = 4$ et $b = 21$. Donc $\vec{n} \begin{pmatrix} 4 \\ 21 \\ 5 \end{pmatrix}$.

- (c) En déduire une équation cartésienne du plan (ABC) .

Le plan passe par $A(0; 1; -2)$ et a pour vecteur normal $\vec{n} \begin{pmatrix} 4 \\ 21 \\ 5 \end{pmatrix}$. Son équation est :

$$4(x - 0) + 21(y - 1) + 5(z - (-2)) = 0$$

$$\text{i.e. } 4x + 21y - 21 + 5z + 10 = 0$$

$$\text{i.e. } 4x + 21y + 5z - 11 = 0$$

2. Soient $A(2; 1; -2)$, $B(-1; 2; 1)$ et $\mathcal{P} : 2x - y + z - 2 = 0$.

- (a) Quelle est la position relative de la droite (AB) et du plan $\mathcal{P}$?

Un vecteur directeur de (AB) est $\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$

Un vecteur normal à $\mathcal{P}$ est $\vec{n} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AB} \cdot \vec{n} &= (-3) \times 2 + 1 \times (-1) + 3 \times 1 \\ &= -6 - 1 + 3 = -4 \\ &\neq 0 \end{aligned}$$

Donc la droite et le plan sont sécants.

- (b) On note I le point d'intersection du plan $\mathcal{P}$ et de la droite (AB) .

Calculer les coordonnées de I .

La droite (AB) a pour représentation paramétrique : $\begin{cases} x = 2 - 3t \\ y = 1 + t \\ z = -2 + 3t \end{cases}$

En remplaçant dans l'équation du plan, on obtient

$$2(2 - 3t) - (1 + t) + (-2 + 3t) - 2 = 0$$

$$\text{i.e. } 4 - 6t - 1 - t - 2 + 3t - 2 = 0$$

$$\text{i.e. } -1 - 4t = 0$$

$$\text{i.e. } t = -\frac{1}{4}$$

$$\text{Donc } I \left(2 + \frac{3}{4}; 1 - \frac{1}{4}; -2 - \frac{3}{4} \right)$$

$$\text{i.e. } I \left(\frac{11}{4}; \frac{3}{4}; -\frac{11}{4} \right)$$

3. Soient $\mathcal{P}_1 : x - 4y + 7 = 0$ et $\mathcal{P}_2 : x + 2y - z + 1 = 0$.

- (a) Quelle est la position relative des plans $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$?

Un vecteur normal à $\mathcal{P}_1$ est $\vec{n}_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix}$

Un vecteur normal à $\mathcal{P}_2$ est $\vec{n}_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$

Ces vecteurs ne sont pas colinéaires, donc les plans sont sécants.

- (b) On note $(\mathcal{D})$ la droite d'intersection des plans $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$. Donner une représentation paramétrique de la droite $(\mathcal{D})$ et la caractériser.

Les points de $(\mathcal{D})$ vérifient le système :

$$\begin{cases} x - 4y + 7 = 0 \\ x + 2y - z + 1 = 0 \end{cases}$$

De la première équation : $x = 4y - 7$

En remplaçant dans la seconde équation

$$(4y - 7) + 2y - z + 1 = 0,$$

on obtient $6y - z - 6 = 0$,

c'est-à-dire $z = 6y - 6$

La représentation paramétrique de $(\mathcal{D})$ est

$$\begin{cases} x = 4t - 7 \\ y = t \\ z = 6t - 6 \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$$

Un vecteur directeur de $(\mathcal{D})$ est $\vec{u} \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 6 \end{pmatrix}$

Pour $t = 0$, on retrouve $A(-7; 0; -6)$

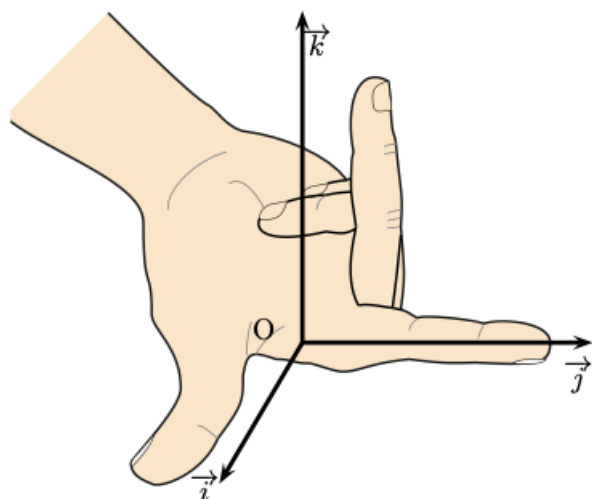
4. Produit vectoriel

A. Quelques définitions

Orienter l'espace, c'est distinguer deux types de bases :

■ DÉFINITION :

Une base de l'espace $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ sera dite **directe** si elle respecte la « Règle de la main droite » :
Sinon, elle sera dite **indirecte**.



Un repère de l'espace $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ est **direct** si la base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ est **directe**.

Remarque : Si $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ est orthonormal direct, alors $(O; \vec{j}, \vec{k}, \vec{i})$ et $(O; \vec{k}, \vec{i}, \vec{j})$ le sont aussi.

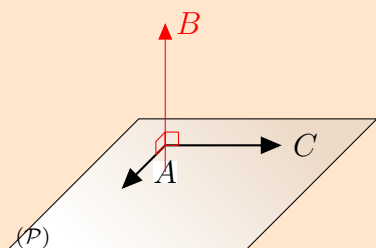
■ DÉFINITION :

Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs de l'espace.

Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires, alors le produit vectoriel des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ est $\vec{0}$.

Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas colinéaires, alors le produit vectoriel des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$, est le vecteur noté $\vec{u} \wedge \vec{v}$, défini par :

- $\vec{u} \wedge \vec{v}$ est orthogonal au vecteur $\vec{u}$ et au vecteur $\vec{v}$.
- La base $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{u} \wedge \vec{v})$ est une base directe.
- $\|\vec{u} \wedge \vec{v}\| = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times |\sin(\widehat{\vec{u}, \vec{v}})|$.



Exemples :

Si la base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ est orthonormale directe, donner les valeurs de :

$$\vec{i} \wedge \vec{i}$$

$$\vec{i} \wedge \vec{i} = \vec{0} \text{ (vecteurs colinéaires)}$$

$$\vec{i} \wedge \vec{0}$$

$$\vec{i} \wedge \vec{0} = \vec{0} \text{ (vecteurs colinéaires)}$$

$$\vec{i} \wedge \vec{j}$$

$$\vec{i} \wedge \vec{j} = \vec{k} \text{ (base directe, vecteurs orthonormés)}$$

$$\vec{j} \wedge \vec{i}$$

$$\vec{j} \wedge \vec{i} = -\vec{k} \text{ (produit vectoriel antisymétrique)}$$

$$\vec{j} \wedge \vec{k}$$

$$\vec{j} \wedge \vec{k} = \vec{i}$$

$$\vec{k} \wedge (2\vec{j})$$

$$\vec{k} \wedge (2\vec{j}) = 2(\vec{k} \wedge \vec{j}) = 2(-\vec{i}) = -2\vec{i}$$

$$(\vec{i} \wedge \vec{j}) \cdot \vec{i}$$

$$(\vec{i} \wedge \vec{j}) \cdot \vec{i} = \vec{k} \cdot \vec{i} = 0$$

$$(\vec{i} \wedge \vec{j}) \cdot \vec{k}$$

$$(\vec{i} \wedge \vec{j}) \cdot \vec{k} = \vec{k} \cdot \vec{k} = 1$$

■ PROPRIÉTÉ :

(i) $\vec{u} \wedge \vec{v} = \vec{0} \Leftrightarrow \vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires.

(ii) $\vec{v} \wedge \vec{u} = -(\vec{u} \wedge \vec{v})$

Démonstration de (i) :

($\Rightarrow$) Supposons que $\vec{u} \wedge \vec{v} = \vec{0}$.

Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires, c'est démontré.

Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas colinéaires, alors d'après la définition du produit vectoriel, on a :

$$\|\vec{u} \wedge \vec{v}\| = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times |\sin(\widehat{\vec{u}, \vec{v}})|$$

Or $\vec{u} \wedge \vec{v} = \vec{0}$, donc $\|\vec{u} \wedge \vec{v}\| = 0$.

Ainsi : $\|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times |\sin(\widehat{\vec{u}, \vec{v}})| = 0$.

Comme $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas colinéaires, ils ne sont pas nuls et ne sont pas parallèles, donc $\|\vec{u}\| \neq 0$, $\|\vec{v}\| \neq 0$ et $\sin(\widehat{\vec{u}, \vec{v}}) \neq 0$.

On aboutit à une contradiction. Donc $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont nécessairement colinéaires.

($\Leftarrow$) Réciproquement, si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires, alors par définition du produit vectoriel, $\vec{u} \wedge \vec{v} = \vec{0}$.

Démonstration de (ii) : en exercices! $\square$

Remarque : La propriété (ii) peut être reformulé en « le produit vectoriel est **antisymétrique** ».

■ DÉFINITION :

Soit E un ensemble.

On dit que $\top$ est **antisymétrique** si

$$\forall (x; y) \in E^2, x \top y = -(y \top x)$$

B. Règles de calcul

■ PROPRIÉTÉ : (admise)

Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs de l'espace, et $(a; b) \in \mathbb{R}^2$. On a les propriétés suivantes :

- (i) $(a\vec{u}) \wedge (b\vec{v}) = ab(\vec{u} \wedge \vec{v})$.
- (ii) $\vec{u} \wedge (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \wedge \vec{v} + \vec{u} \wedge \vec{w}$.

Exemple :

Calculer $(\vec{u} + \vec{v}) \wedge (\vec{u} - \vec{v})$.

$$\begin{aligned} & (\vec{u} + \vec{v}) \wedge (\vec{u} - \vec{v}) \\ &= \vec{u} \wedge (\vec{u} - \vec{v}) + \vec{v} \wedge (\vec{u} - \vec{v}) \\ &= \vec{u} \wedge \vec{u} - \vec{u} \wedge \vec{v} + \vec{v} \wedge \vec{u} - \vec{v} \wedge \vec{v} \\ &= \vec{0} - \vec{u} \wedge \vec{v} - \vec{u} \wedge \vec{v} - \vec{0} \\ &= -2\vec{u} \wedge \vec{v} \end{aligned}$$

■ PROPRIÉTÉ :

Soient $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ une base orthonormale directe, $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs de coordonnées respectives $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$ dans cette base. Dans la base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, le vecteur $\vec{u} \wedge \vec{v}$ a pour coordonnées

$$\begin{pmatrix} yz' - zy' \\ zx' - xz' \\ xy' - yx' \end{pmatrix}$$

Démonstration. Soit $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ une base orthonormale directe. Si $\vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ où $(x; y; z) \in \mathbb{R}^3$ et $\vec{v} = x'\vec{i} + y'\vec{j} + z'\vec{k}$ où $(x'; y'; z') \in \mathbb{R}^3$, calculer les coordonnées de $\vec{u} \wedge \vec{v}$.

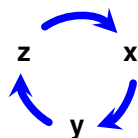
$$\begin{aligned} \vec{u} \wedge \vec{v} &= (x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}) \wedge (x'\vec{i} + y'\vec{j} + z'\vec{k}) \\ &= xx'(\vec{i} \wedge \vec{i}) + xy'(\vec{i} \wedge \vec{j}) + xz'(\vec{i} \wedge \vec{k}) \\ &\quad + yx'(\vec{j} \wedge \vec{i}) + yy'(\vec{j} \wedge \vec{j}) + yz'(\vec{j} \wedge \vec{k}) \\ &\quad + zx'(\vec{k} \wedge \vec{i}) + zy'(\vec{k} \wedge \vec{j}) + zz'(\vec{k} \wedge \vec{k}) \\ &= 0 + xy'\vec{k} + xz'(-\vec{j}) \\ &\quad + yx'(-\vec{k}) + 0 + yz'\vec{i} \\ &\quad + zx'\vec{j} + zy'(-\vec{i}) + 0 \\ &= (yz' - zy')\vec{i} + (zx' - xz')\vec{j} + (xy' - yx')\vec{k} \end{aligned}$$

Donc $\vec{u} \wedge \vec{v} = \begin{pmatrix} yz' - zy' \\ zx' - xz' \\ xy' - yx' \end{pmatrix}$. □

Remarque :

La première coordonnée de $\vec{u} \wedge \vec{v}$ est $\begin{vmatrix} y & z \\ y' & z' \end{vmatrix}$ et les deux autres coordonnées

s'en déduisent par **permutation circulaire**.



Remarque : Pour calculer les coordonnées du vecteur $\vec{u} \wedge \vec{v}$, on peut aussi utiliser la méthode suivante :

- Première coordonnée : on barre la première ligne de la matrice des coordonnées et on calcule le déterminant 2×2 restant

$$\begin{pmatrix} x & x' \\ y & y' \\ z & z' \end{pmatrix} \text{ donc } \begin{vmatrix} y & y' \\ z & z' \end{vmatrix} = yz' - y'z$$

- Deuxième coordonnée : on barre la deuxième ligne et on calcule le déterminant (qui doit être multiplié par $-$)

$$\begin{pmatrix} x & x' \\ y & y' \\ z & z' \end{pmatrix} \text{ donc } -\begin{vmatrix} x & x' \\ z & z' \end{vmatrix} = -(xz' - x'z) = x'z - xz'$$

- Troisième coordonnée : on barre la troisième ligne et on calcule le déterminant

$$\begin{pmatrix} x & x' \\ y & y' \\ z & z' \end{pmatrix} \text{ donc } \begin{vmatrix} x & x' \\ y & y' \end{vmatrix} = xy' - x'y$$

Exemple :

Soit $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ un repère orthonormé direct, et $A(1; -1; 1)$, $B(3; -2; 4)$ et $C(-3; 1; -1)$.

Calculer les coordonnées de $\vec{AB} \wedge \vec{AC}$.

$$\vec{AB} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} \text{ et } \vec{AC} \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$\vec{AB} \wedge \vec{AC} \begin{pmatrix} (-1) \times (-2) - 3 \times 2 \\ 3 \times (-4) - 2 \times (-2) \\ 2 \times 2 - (-1) \times (-4) \end{pmatrix}$$

$$\text{c'est-à-dire } \vec{AB} \wedge \vec{AC} \begin{pmatrix} -4 \\ -8 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Calculer les coordonnées de :

$$\vec{AC} \wedge \vec{AB} = -(\vec{AB} \wedge \vec{AC}) \text{ i.e. } \vec{AC} \wedge \vec{AB} \begin{pmatrix} 4 \\ 8 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\vec{AB} \wedge \vec{BC}$$

$$\vec{BC} \begin{pmatrix} -6 \\ 3 \\ -3 \end{pmatrix} \text{ donc } \vec{AB} \wedge \vec{BC} \begin{pmatrix} (-1) \times (-3) - 3 \times 3 \\ 3 \times (-6) - 2 \times (-3) \\ 2 \times 3 - (-1) \times (-6) \end{pmatrix}$$

$$\text{c'est-à-dire } \vec{AB} \wedge \vec{BC} \begin{pmatrix} -6 \\ -12 \\ 0 \end{pmatrix}$$

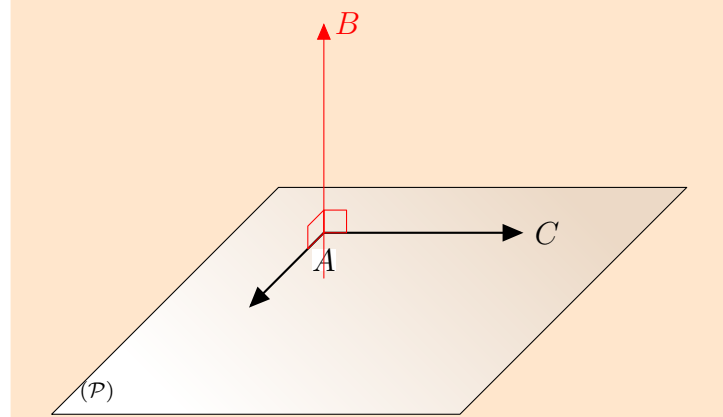
$$\vec{BA} \wedge 2\vec{AC} = -2(\vec{AB} \wedge \vec{AC}) \text{ i.e. } \vec{BA} \wedge 2\vec{AC} \begin{pmatrix} 8 \\ 16 \\ 0 \end{pmatrix}$$

C. Quelques applications du produit vectoriel

a. Calculer les coordonnées d'un vecteur normal à un plan

■ DÉFINITION :

Si A, B, C sont trois points non alignés de l'espace, alors le vecteur $\vec{n} = \vec{AB} \wedge \vec{AC}$ est un vecteur normal au plan (ABC) .



Exemple :

Dans le repère $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, on donne les points $A(-1; 1; 3)$, $B(2; 1; 0)$ et $C(4; -1; 5)$.

Vérifier que les points A, B et C déterminent un plan (ABC) puis en déterminer une équation cartésienne.

$$\vec{AB} \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix} \text{ et } \vec{AC} \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Ces vecteurs ne sont pas colinéaires, donc les points déterminent un plan.

$$\vec{n} = \vec{AB} \wedge \vec{AC}$$

$$\vec{n} \begin{pmatrix} 0 \times 2 - (-3) \times (-2) \\ (-3) \times 5 - 3 \times 2 \\ 3 \times (-2) - 0 \times 5 \end{pmatrix}$$

$$\text{c'est-à-dire } \vec{n} \begin{pmatrix} -6 \\ -21 \\ -6 \end{pmatrix}$$

Un vecteur normal est donc $\vec{n} \begin{pmatrix} 2 \\ 7 \\ 2 \end{pmatrix}$

L'équation du plan passant par $A(-1; 1; 3)$ et de vecteur normal $\vec{n} \begin{pmatrix} 2 \\ 7 \\ 2 \end{pmatrix}$ est :

$$2(x+1) + 7(y-1) + 2(z-3) = 0$$

$$\Leftrightarrow 2x + 2 + 7y - 7 + 2z - 6 = 0$$

$$\Leftrightarrow 2x + 7y + 2z - 11 = 0$$

b. Calculer l'aire d'un triangle

■ PROPRIÉTÉ :

L'aire d'un triangle ABC est $\mathcal{A} = \frac{1}{2} \|\vec{AB} \wedge \vec{AC}\|$

Démonstration.

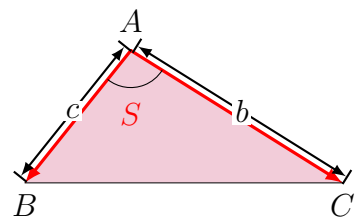
On considère le triangle ABC ci-contre.

On sait que l'aire d'un triangle ABC est

$$\mathcal{A} = \frac{1}{2} bc \sin \hat{A}$$

Or : $bc \sin \hat{A} = \|\vec{AB}\| \times \|\vec{AC}\| \times \sin \hat{A} = \|\vec{AB} \wedge \vec{AC}\|$.

Donc l'aire du triangle ABC est $\mathcal{A} = \frac{1}{2} \|\vec{AB} \wedge \vec{AC}\|$. $\square$



Exemple :

Dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, soient $A(1; -1; 3)$, $B(3; -1; 0)$ et $C(-5; 2; -3)$. Calculer l'aire du triangle ABC .

$$\vec{AB} \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix} \text{ et } \vec{AC} \begin{pmatrix} -6 \\ 3 \\ -6 \end{pmatrix}$$

$$\vec{AB} \wedge \vec{AC} \begin{pmatrix} 0 \times (-6) - (-3) \times 3 \\ (-3) \times (-6) - 2 \times (-6) \\ 2 \times 3 - 0 \times (-6) \end{pmatrix},$$

$$\text{i.e. } \vec{AB} \wedge \vec{AC} \begin{pmatrix} 9 \\ 30 \\ 6 \end{pmatrix}$$

$$\|\vec{AB} \wedge \vec{AC}\| = \sqrt{9^2 + 30^2 + 6^2}$$

$$= \sqrt{1017}$$

$$= 3\sqrt{113}$$

$$\text{Donc } \mathcal{A}_{ABC} = \frac{1}{2} \times 3\sqrt{113} = \frac{3\sqrt{113}}{2}$$

c. Calculer l'aire d'un parallélogramme

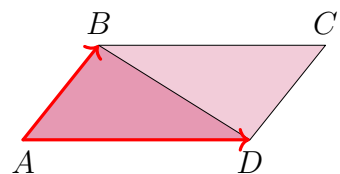
■ PROPRIÉTÉ :

L'aire d'un parallélogramme $ABCD$ est :

$$\mathcal{A} = \|\vec{AB} \wedge \vec{AD}\|$$

Démonstration.

L'aire du parallélogramme $ABCD$ est double de celle du triangle ABD , on conclut en utilisant la propriété précédente.



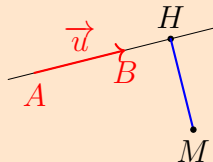
5. Calculs de distances et de mesures d'angles dans l'espace

A. Distance d'un point à une droite

■ DÉFINITION :

Soit $(\mathcal{D}) = d(A; \vec{u})$ avec $\overrightarrow{AB} = \vec{u}$ une droite de l'espace, M un point et H le projeté orthogonal du point M sur $(\mathcal{D})$.

On appelle **distance du point M à la droite $(\mathcal{D})$** la distance MH .



■ PROPRIÉTÉ :

La distance du point M à la droite $d(A; \vec{u})$ est

$$MH = \frac{\|\overrightarrow{AM} \wedge \vec{u}\|}{\|\vec{u}\|}$$

Démonstration. Soit H le projeté orthogonal de M sur la droite $d(A; \vec{u})$.

Par définition du projeté orthogonal, le vecteur $\overrightarrow{MH}$ est orthogonal au vecteur directeur $\vec{u}$ de la droite.

On sait que $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AH} + \overrightarrow{HM}$.

Comme H appartient à la droite $d(A; \vec{u})$, il existe $t \in \mathbb{R}$ tel que $\overrightarrow{AH} = t\vec{u}$.

De plus, $\overrightarrow{HM}$ est orthogonal à $\vec{u}$, donc $\overrightarrow{HM} \cdot \vec{u} = 0$.
Calculons maintenant $\overrightarrow{AM} \wedge \vec{u}$:

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AM} \wedge \vec{u} &= (\overrightarrow{AH} + \overrightarrow{HM}) \wedge \vec{u} \\ &= \overrightarrow{AH} \wedge \vec{u} + \overrightarrow{HM} \wedge \vec{u} \\ &= t\vec{u} \wedge \vec{u} + \overrightarrow{HM} \wedge \vec{u} \\ &= \vec{0} + \overrightarrow{HM} \wedge \vec{u} \\ &= \overrightarrow{HM} \wedge \vec{u} \end{aligned}$$

Sachant que $\overrightarrow{HM}$ et $\vec{u}$ sont orthogonaux,

$$\begin{aligned} \|\overrightarrow{AM} \wedge \vec{u}\| &= \|\overrightarrow{HM} \wedge \vec{u}\| \\ &= \|\overrightarrow{HM}\| \times \|\vec{u}\| \times \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) \\ &= \|\overrightarrow{HM}\| \times \|\vec{u}\| \times 1 \\ &= MH \times \|\vec{u}\| \end{aligned}$$

D'où $\|\overrightarrow{AM} \wedge \vec{u}\| = MH \times \|\vec{u}\|$

En divisant par $\|\vec{u}\|$ (qui est non nul car $\vec{u}$ est un vecteur directeur), on obtient :

$$MH = \frac{\|\overrightarrow{AM} \wedge \vec{u}\|}{\|\vec{u}\|}$$

□

Exemples :

Dans un repère orthonormé direct $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$:

1. Soient les points $A(1; 0; 0)$, $B(0; 0; 1)$ et $M(1; 1; 1)$. Calculer la distance de M à la droite (AB) .

$$\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ et } \overrightarrow{AM} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{On sait que } \overrightarrow{AM} \wedge \overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} 1 \times 1 - 1 \times 0 \\ 1 \times (-1) - 0 \times 1 \\ 0 \times 0 - 1 \times (-1) \end{pmatrix},$$

$$\text{i.e. } \overrightarrow{AM} \wedge \overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{Donc } \|\overrightarrow{AM} \wedge \overrightarrow{AB}\| = \sqrt{1+1+1} = \sqrt{3}$$

$$\text{De plus, } \|\overrightarrow{AB}\| = \sqrt{1+0+1} = \sqrt{2}$$

Donc la distance d cherchée est

$$d = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{6}}{2}$$

2. Soit $(\mathcal{D})$ la droite de représentation

$$\text{paramétrique } \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 1 - t \\ z = 1 + t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$$

et $A(2; -1; 3)$. Calculer la distance de A à $(\mathcal{D})$.

Un point de la droite $(\mathcal{D})$ est (pour $t = 0$) : $P(1; 1; 1)$. Un vecteur directeur de la droite

$$(\mathcal{D}) \text{ est } \vec{u} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}. \text{ Ainsi } \overrightarrow{PA} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\text{Donc } \overrightarrow{PA} \wedge \vec{u} \begin{pmatrix} (-2) \times 1 - 2 \times (-1) \\ 2 \times 2 - 1 \times 1 \\ 1 \times (-1) - (-2) \times 2 \end{pmatrix},$$

$$\text{i.e. } \overrightarrow{PA} \wedge \vec{u} \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\text{Donc } \|\overrightarrow{PA} \wedge \vec{u}\| = \sqrt{0+9+9} = 3\sqrt{2}$$

$$\text{et } \|\vec{u}\| = \sqrt{4+1+1} = \sqrt{6}$$

Donc la distance d cherchée est

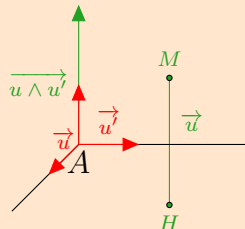
$$\begin{aligned} d &= \frac{3\sqrt{2}}{\sqrt{6}} \\ &= \frac{3}{\sqrt{3}} \\ &= \sqrt{3} \end{aligned}$$

B. Distance d'un point à un plan

■ DÉFINITION :

Soient le plan $(\mathcal{P}) = \mathcal{P}(A; \vec{u}, \vec{u}')$ avec $\overrightarrow{AB} = \vec{u}$ et $\overrightarrow{AC} = \vec{u}'$, M un point et H son projeté orthogonal sur le plan $(\mathcal{P})$.

On appelle **distance du point M au plan $(\mathcal{P})$** est la distance MH .



■ PROPRIÉTÉ :

La distance du point M au plan $\mathcal{P}(A; \vec{u}, \vec{u}')$ est :

$$MH = \frac{|\overrightarrow{AM} \cdot (\vec{u} \wedge \vec{u}')|}{\|\vec{u} \wedge \vec{u}'\|}$$

Démonstration. Soit H le projeté orthogonal de M sur le plan $\mathcal{P}(A; \vec{u}, \vec{u}')$.

Par définition du projeté orthogonal, le vecteur $\overrightarrow{MH}$ est orthogonal au plan $\mathcal{P}$.

Le vecteur $\vec{n} = \vec{u} \wedge \vec{u}'$ est un vecteur normal au plan $\mathcal{P}$ car il est orthogonal à la fois à $\vec{u}$ et à $\vec{u}'$.

On sait que $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AH} + \overrightarrow{HM}$.

Le vecteur $\overrightarrow{AH}$ appartient au plan $\mathcal{P}$, donc il existe $(\alpha; \beta) \in \mathbb{R}^2$ tel que $\overrightarrow{AH} = \alpha \vec{u} + \beta \vec{u}'$.

Le vecteur $\overrightarrow{HM}$ est orthogonal au plan, donc il est colinéaire au vecteur normal, c'est-à-dire : il existe $\lambda \in \mathbb{R}$, $\overrightarrow{HM} = \lambda(\vec{u} \wedge \vec{u}')$.

Calculons le produit scalaire $\overrightarrow{AM} \cdot (\vec{u} \wedge \vec{u}')$

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AM} \cdot (\vec{u} \wedge \vec{u}') &= (\overrightarrow{AH} + \overrightarrow{HM}) \cdot (\vec{u} \wedge \vec{u}') \\ &= \overrightarrow{AH} \cdot (\vec{u} \wedge \vec{u}') + \overrightarrow{HM} \cdot (\vec{u} \wedge \vec{u}') \\ &= (\alpha \vec{u} + \beta \vec{u}') \cdot (\vec{u} \wedge \vec{u}') \\ &\quad + \overrightarrow{HM} \cdot (\vec{u} \wedge \vec{u}') \end{aligned}$$

Or, le vecteur $\vec{u} \wedge \vec{u}'$ est orthogonal à la fois à $\vec{u}$ et à $\vec{u}'$, donc $\vec{u} \cdot (\vec{u} \wedge \vec{u}') = 0$ et $\vec{u}' \cdot (\vec{u} \wedge \vec{u}') = 0$.

Par conséquent

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AM} \cdot (\vec{u} \wedge \vec{u}') &= 0 + \overrightarrow{HM} \cdot (\vec{u} \wedge \vec{u}') \\ &= \lambda(\vec{u} \wedge \vec{u}') \cdot (\vec{u} \wedge \vec{u}') \\ &= \lambda \|\vec{u} \wedge \vec{u}'\|^2 \end{aligned}$$

De plus, comme $\overrightarrow{HM} = \lambda(\vec{u} \wedge \vec{u}')$, on a :

$$MH = \|\overrightarrow{HM}\| = |\lambda| \times \|\vec{u} \wedge \vec{u}'\|$$

$$\text{Donc : } |\lambda| = \frac{MH}{\|\vec{u} \wedge \vec{u}'\|}$$

En prenant la valeur absolue de $\overrightarrow{AM} \cdot (\vec{u} \wedge \vec{u}')$

$$\begin{aligned} |\overrightarrow{AM} \cdot (\vec{u} \wedge \vec{u}')| &= |\lambda| \cdot \|\vec{u} \wedge \vec{u}'\|^2 \\ &= MH \times \|\vec{u} \wedge \vec{u}'\| \end{aligned}$$

En divisant par $\|\vec{u} \wedge \vec{u}'\|$ (qui est non nul car $\vec{u}$ et $\vec{u}'$ ne sont pas colinéaires), on obtient

$$MH = \frac{|\overrightarrow{AM} \cdot (\vec{u} \wedge \vec{u}')|}{\|\vec{u} \wedge \vec{u}'\|}$$

□

Remarque : Dans le calcul précédent, on peut remarquer que la seule caractéristique du vecteur $\vec{u} \wedge \vec{u}'$ qui revêt une importance dans l'établissement de cette formule est qu'il est un vecteur normal au plan $(\mathcal{P})$: on peut donc le remplacer par n'importe quel vecteur $\vec{n}$ normal à $(\mathcal{P})$.

■ PROPRIÉTÉ :

Si $(\mathcal{P})$ est le plan passant par le point A et $\vec{n}$ un vecteur normal à $(\mathcal{P})$ alors la distance du point M

au plan $(\mathcal{P})$ est : $MH = \frac{|\overrightarrow{AM} \cdot \vec{n}|}{\|\vec{n}\|}$.

Exemples :

Dans un repère orthonormé direct $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$:

1. Soient les points $A(2; -1; 3)$, $B(3; 0; 4)$, $C(1; 1; 4)$ et $M(-1; 3; 4)$. Calculer la distance de M au plan (ABC) .

$$\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ et } \overrightarrow{AC} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}. \text{ Ainsi } \vec{n} = \overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$$

$$\text{c'est-à-dire } \vec{n} \begin{pmatrix} 1 \times 1 - 1 \times 2 \\ 1 \times (-1) - 1 \\ 1 \times 2 - (-1) \end{pmatrix}$$

$$\text{ou encore } \vec{n} \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}. \text{ De plus, } \overrightarrow{AM} \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AM} \cdot \vec{n} &= (-3) \times (-1) + 4 \times (-2) + 1 \times 3 \\ &= 3 - 8 + 3 \\ &= -2 \end{aligned}$$

$$\|\vec{n}\| = \sqrt{1 + 4 + 9} = \sqrt{14}$$

Soit d la distance cherchée.

$$d = \frac{|-2|}{\sqrt{14}} = \frac{2}{\sqrt{14}} = \frac{2\sqrt{14}}{14} = \frac{\sqrt{14}}{7}$$

2. Soit $(\mathcal{P})$ le plan d'équation cartésienne

$$2x - 3y + 5z - 4 = 0$$

et $M(1; 2; 1)$.

Calculer la distance de M à $(\mathcal{P})$.

Un vecteur normal au plan $(\mathcal{P})$ est $\vec{n} \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 5 \end{pmatrix}$.

Choisissons un point quelconque A du plan : on peut prendre $A(2; 0; 0)$ (en posant $y = z = 0$

dans l'équation). Alors $\overrightarrow{AM} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AM} \cdot \vec{n} &= (-1) \times 2 + 2 \times (-3) + 1 \times 5 \\ &= -2 - 6 + 5 \\ &= -3 \end{aligned}$$

De plus, $\|\vec{n}\| = \sqrt{4 + 9 + 25} = \sqrt{38}$

Donc, si d est la distance cherchée,

$$d = \frac{|-3|}{\sqrt{38}} = \frac{3}{\sqrt{38}} = \frac{3\sqrt{38}}{38}$$

On déduit de la formule précédente :

■ PROPRIÉTÉ :

Si dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, le plan $(\mathcal{P})$ admet pour équation cartésienne : $ax + by + cz + d = 0$ et si $M(x_M; y_M; z_M)$ alors la distance du point M au plan $(\mathcal{P})$ est : $MH = \frac{|ax_M + by_M + cz_M + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$ où H est le projeté orthogonal de M sur le plan $(\mathcal{P})$.

Démonstration. Soit $(\mathcal{P})$ un plan d'équation

$$ax + by + cz + d = 0$$

et $M(x_M; y_M; z_M)$ un point de l'espace.

Un vecteur normal au plan est $\vec{n} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$.

Pour trouver un point A du plan, on peut poser par exemple $y = 0$ et $z = 0$ dans l'équation

(si $a \neq 0$), ce qui donne $ax + d = 0$, soit $x = -\frac{d}{a}$,

donc $A \left(-\frac{d}{a}; 0; 0 \right)$.

De plus,

$$\overrightarrow{AM} \begin{pmatrix} x_M + \frac{d}{a} \\ y_M \\ z_M \end{pmatrix}$$

Le produit scalaire $\overrightarrow{AM} \cdot \vec{n}$ vaut :

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AM} \cdot \vec{n} &= a \left(x_M + \frac{d}{a} \right) + by_M + cz_M \\ &= ax_M + d + by_M + cz_M \\ &= ax_M + by_M + cz_M + d \end{aligned}$$

D'après la propriété de distance d'un point à un plan utilisant le produit scalaire :

$$MH = \frac{|\overrightarrow{AM} \cdot \vec{n}|}{\|\vec{n}\|}$$

Or, $\|\vec{n}\| = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$.

Par conséquent :

$$MH = \frac{|ax_M + by_M + cz_M + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

Remarque : Si $a = 0$, on peut choisir un autre point du plan en posant $x = 0$ et $z = 0$ (si $b \neq 0$), ce qui donne $B \left(0; -\frac{d}{b}; 0 \right)$, ou $x = 0$ et $y = 0$ (si $c \neq 0$), ce qui donne $C \left(0; 0; -\frac{d}{c} \right)$. Le calcul aboutit au même résultat car au moins un des coefficients a , b ou c est non nul. $\square$

Exemple :

Reprendre le calcul de la distance de M à $(\mathcal{P})$ de l'exemple précédent en utilisant cette formule.

L'équation du plan est

$$2x - 3y + 5z - 4 = 0$$

Un point du plan est

$$M(1; 2; 1)$$

Ainsi

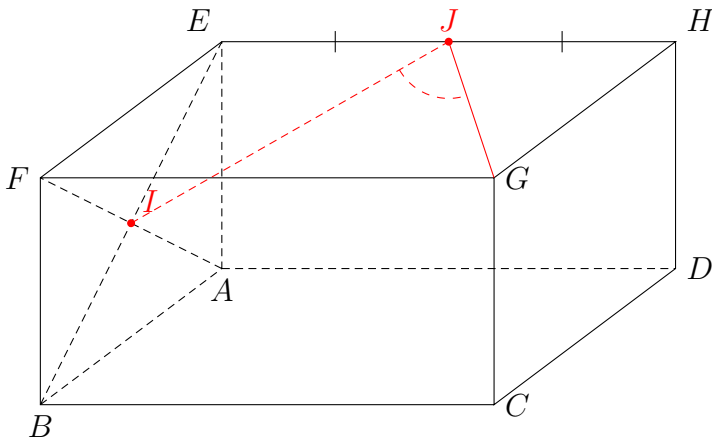
$$\begin{aligned} d &= \frac{|2 \times 1 - 3 \times 2 + 5 \times 1 - 4|}{\sqrt{2^2 + (-3)^2 + 5^2}} \\ &= \frac{|2 - 6 + 5 - 4|}{\sqrt{4 + 9 + 25}} \\ &= \frac{|-3|}{\sqrt{38}} \\ &= \frac{3}{\sqrt{38}} \end{aligned}$$

C. Calcul d'un angle géométrique

En travaillant dans un plan et en utilisant le cosinus, le produit scalaire dans l'espace permet de calculer des angles géométriques (c'est-à-dire non orientés).

Exemple :

$ABCDEFGH$ est un pavé droit vérifiant : $AB = AE = 2$ et $AD = 4$. Le point I est le centre du rectangle $EFGH$ et le point J est le milieu du segment $[EH]$. Déterminer la mesure de l'angle géométrique $\widehat{IJA}$ arrondie au dixième de degré.



On place un repère orthonormé $(A; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$ avec $\|\overrightarrow{AB}\| = \|\overrightarrow{AE}\| = 2$ et $\|\overrightarrow{AD}\| = 4$.

Les coordonnées des points sont :

- $A(0; 0; 0)$
- $E(0; 0; 2)$
- $F(2; 0; 2)$
- $G(2; 4; 2)$
- $H(0; 4; 2)$
- I , en tant que centre de $EFGH$: $I(1; 2; 2)$
- J , en tant que milieu de $[EH]$: $J(0; 2; 2)$

Donc $\overrightarrow{JI} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{JA} \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix}$

$$\begin{aligned} \cos(\widehat{IJA}) &= \frac{\overrightarrow{JI} \cdot \overrightarrow{JA}}{\|\overrightarrow{JI}\| \times \|\overrightarrow{JA}\|} \\ &= \frac{1 \times 0 + 0 \times (-2) + 0 \times (-2)}{1 \times \sqrt{0 + 4 + 4}} \\ &= \frac{0}{1 \times 2\sqrt{2}} \\ &= 0 \end{aligned}$$

Donc $\widehat{IJA} = 90^\circ$.

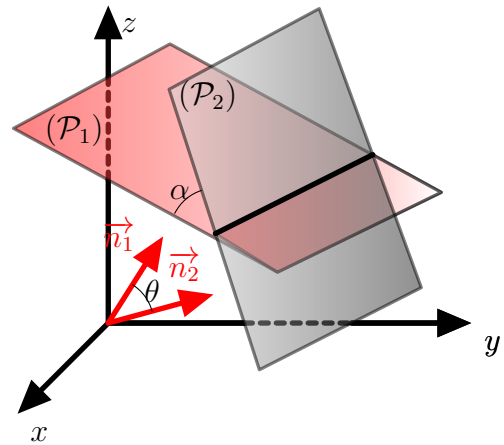
D. Calcul de l'angle formé par deux plans

■ PROPRIÉTÉ :

Soit $(\mathcal{P}_1)$ un plan et $\vec{n}_1$ un vecteur normal à $(\mathcal{P}_1)$.
Soit $(\mathcal{P}_2)$ un plan et $\vec{n}_2$ un vecteur normal à $(\mathcal{P}_2)$.

On note α l'angle géométrique formé par les plans $(\mathcal{P}_1)$ et $(\mathcal{P}_2)$ comme sur la figure ci-dessous. Alors

$$\alpha = \arccos \left(\left| \frac{\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2}{\|\vec{n}_1\| \|\vec{n}_2\|} \right| \right)$$



Démonstration. Soient $(\mathcal{P}_1)$ et $(\mathcal{P}_2)$ deux plans sécants, et $\vec{n}_1, \vec{n}_2$ des vecteurs normaux respectifs à ces plans.

L'angle géométrique α formé par les deux plans est, par définition, l'angle aigu (ou droit) entre eux le long de leur droite d'intersection.

Les vecteurs $\vec{n}_1$ et $\vec{n}_2$ sont perpendiculaires à leurs plans respectifs. On peut montrer géométriquement que l'angle θ formé par $\vec{n}_1$ et $\vec{n}_2$ est soit égal à α , soit à $\pi - \alpha$, selon l'orientation choisie pour chaque vecteur normal. Dans les deux cas :

$$|\cos \theta| = |\cos \alpha|$$

Or, comme $\alpha \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$, $\cos \alpha \geq 0$, donc

$$\cos \alpha = |\cos \theta|$$

Par définition du produit scalaire :

$$\cos \theta = \frac{\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2}{\|\vec{n}_1\| \|\vec{n}_2\|}$$

On en déduit :

$$\cos \alpha = \left| \frac{\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2}{\|\vec{n}_1\| \|\vec{n}_2\|} \right|$$

Et donc :

$$\alpha = \arccos \left(\left| \frac{\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2}{\|\vec{n}_1\| \|\vec{n}_2\|} \right| \right)$$

Exemple :

Calculer la valeur arrondie au dixième de degré de la mesure de l'angle α formé par les plans

$$(\mathcal{P}) : y - 2z = -10 \text{ et } (\mathcal{Q}) : x + 2z = 20.$$

Un vecteur normal à $(\mathcal{P})$ est $\vec{n}_1 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$

Un vecteur normal à $(\mathcal{Q})$ est $\vec{n}_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$

$$\text{Donc } \vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2 = 0 \times 1 + 1 \times 0 + (-2) \times 2 = -4$$

$$\text{De plus, } \|\vec{n}_1\| = \sqrt{0+1+4} = \sqrt{5} \\ \text{et } \|\vec{n}_2\| = \sqrt{1+0+4} = \sqrt{5}$$

$$\text{D'où } \cos \alpha = \left| \frac{-4}{\sqrt{5} \times \sqrt{5}} \right| = \left| \frac{-4}{5} \right| = \frac{4}{5} = 0,8$$

$$\text{Ainsi } \alpha = \arccos(0,8) \approx 36,9^\circ$$

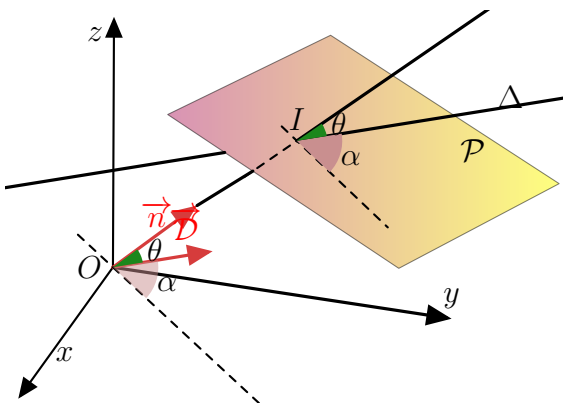
E. Calcul de l'angle formé par un plan et une sécante à ce plan

■ PROPRIÉTÉ :

Soit $(\mathcal{P})$ un plan et $\vec{n}$ un vecteur normal à $(\mathcal{P})$.
Soit $(\mathcal{D})$ une droite et $\vec{d}$ un vecteur normal à $(\mathcal{D})$.

On note α l'angle géométrique formé par le plan $(\mathcal{P})$ et la droite $(\mathcal{D})$ comme sur la figure ci-dessous.
Alors

$$\alpha = \arcsin \left(\left| \frac{\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2}{\|\vec{n}_1\| \|\vec{n}_2\|} \right| \right)$$



Démonstration. Soient $(\mathcal{P})$ un plan, $\vec{n}$ un vecteur normal à $(\mathcal{P})$, $(\mathcal{D})$ une droite et $\vec{d}$ un vecteur directeur de $(\mathcal{D})$.

L'angle géométrique α entre le plan et la droite est l'angle aigu (ou nul) entre $(\mathcal{D})$ et sa projection orthogonale sur $(\mathcal{P})$. C'est donc le **complémentaire** de l'angle θ entre $\vec{d}$ et $\vec{n}$ (ou entre $\vec{d}$ et $-\vec{n}$, selon l'orientation), ce qu'on peut voir sur une figure :

- $\vec{n}$ est perpendiculaire au plan,
- $\vec{d}$ fait un angle θ avec $\vec{n}$,
- donc $\vec{d}$ fait un angle $\frac{\pi}{2} - \theta$ avec le plan, c'est-à-dire $\alpha = \frac{\pi}{2} - \theta$.

Comme pour le paragraphe D, le choix d'orientation de $\vec{n}$ peut donner θ ou $\pi - \theta$, donc on prend la valeur absolue pour garantir que $\alpha \geq 0$. On a ainsi :

$$\alpha = \frac{\pi}{2} - \theta \quad \text{avec} \quad \cos \theta = \left| \frac{\vec{n} \cdot \vec{d}}{\|\vec{n}\| \|\vec{d}\|} \right|$$

En utilisant le sinus, en utilisant

$$\sin \alpha = \sin \left(\frac{\pi}{2} - \theta \right) = \cos \theta$$

on obtient :

$$\sin \alpha = \left| \frac{\vec{n} \cdot \vec{d}}{\|\vec{n}\| \|\vec{d}\|} \right|$$

Et donc :

$$\alpha = \arcsin \left(\left| \frac{\vec{n} \cdot \vec{d}}{\|\vec{n}\| \|\vec{d}\|} \right| \right)$$

Exemple :

Calculer la mesure de l'angle entre l'axe (Oz) et le plan d'équation : $y - 2z = -10$.

Un vecteur directeur de (Oz) est $\vec{d} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

Un vecteur normal au plan est $\vec{n} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$

$$\text{Donc } \vec{n} \cdot \vec{d} = 0 \times 0 + 1 \times 0 + (-2) \times 1 = -2$$

$$\text{De plus, } \|\vec{n}\| = \sqrt{0+1+4} = \sqrt{5} \\ \text{et } \|\vec{d}\| = 1$$

$$\text{D'où } \sin \alpha = \frac{|-2|}{\sqrt{5} \times 1} = \frac{2}{\sqrt{5}} = \frac{2\sqrt{5}}{5}$$

$$\text{Ainsi } \alpha = \arcsin \left(\frac{2\sqrt{5}}{5} \right) \approx 63,4^\circ$$