

Séquence XXI – Nombres complexes (partie 2)

Interprétation géométrique et module



Exercice XXI.1

Déterminer l'ensemble des points M d'affixe z tels que $\frac{z-1}{z+i}$ soit un imaginaire pur.



Exercice XXI.2

Le plan complexe est muni du repère $(O; \vec{u}, \vec{v})$. On considère le point $A(i)$.

À tout point $M(z)$ où $z \neq i$, on associe le point $M'(z')$ où

$$z' = \frac{iz - 2 + 4i}{z - i}$$

On pose $z = x + iy$ où $(x; y) \in \mathbb{R}^2$ et $z' = x' + iy'$ où $(x'; y') \in \mathbb{R}^2$.

1. Calculer x' et y' en fonction de x et y .
2. Déterminer et représenter l'ensemble $(\mathcal{E})$ des points $M(z)$ tels que $z' \in i\mathbb{R}$.
3. Déterminer l'ensemble $(\mathcal{F})$ des points $M(z)$ tels que $z' \in \mathbb{R}$.



Exercice XXI.3

On définit, pour $z \neq 2i$, $Z = \frac{z+1}{z-2i}$.

Déterminer l'ensemble des points M d'affixe z tels que :

1. Z soit réel.
2. Z soit imaginaire pur.
3. Z ait un module égal à 1.



Exercice XXI.4

Calculer les modules des nombres complexes

- $z_1 = 7$
- $z_2 = -2$
- $z_3 = 3i$
- $z_4 = -5i$
- $z_5 = 3 + 4i$
- $z_6 = -8 + 5i$
- $z_7 = -\frac{1}{2} + \frac{3}{2}i$



Exercice XXI.5

Montrer que, si $|1 + iz| = |1 - iz|$, alors z est réel.



Exercice XXI.6

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{u}, \vec{v})$. Déterminer l'ensemble des points M d'affixe z tels que :

1. $|z - 2i| = 2$
2. $|z - i| = |z + i|$



Exercice XXI.7

Donner des interprétations graphiques des propriétés

$$|z| = |-z| = |\bar{z}| = |-\bar{z}|$$

et

$$|\operatorname{Re}(z)| \leq |z| \text{ et } |\operatorname{Im}(z)| \leq |z|$$



Exercice XXI.8

Calculer les modules de :

$$z_1 = (\sqrt{6} + i)(5 + i\sqrt{5})$$

$$z_2 = \left(\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{2018}$$

$$z_3 = \left(\frac{\sqrt{3} - i}{1 + i}\right)^{20}$$



Exercice XXI.9

Montrer que si les complexes u et v sont dans $\mathbb{U}$, avec $1 + uv$ non nul, alors $z = \frac{u+v}{1+uv}$ est réel.



Exercice XXI.10

Soit $z \in \mathbb{C} \setminus \{1\}$. On note M le point du plan complexe d'affixe z .

On pose $w = \frac{2iz+1}{z-1}$.

Dans le cours, on a déterminé l'ensemble $(\mathcal{E})$ des points du plan complexe tels que w est imaginaire pur. On va maintenant prolonger l'exercice...

- a) Déterminer et construire l'ensemble $(\mathcal{F})$ des points du plan complexe tels que w est réel.
- b) Déterminer et construire l'ensemble $(\mathcal{G})$ des points du plan tels que $|w| = 2$.

Séquence XXI – Nombres complexes (partie 2)

Argument

Exercice XXI.11

Par lecture graphique d'un dessin, déterminer le module et l'argument principal (c'est-à-dire celui de $]-\pi; \pi]$) de

- $z_1 = 3$
- $z_2 = -5$
- $z_3 = 2i$
- $z_4 = -6i$
- $z_5 = 2 + 2i$
- $z_6 = -3 + 3i$

Exercice XXI.16

Écrire sous forme exponentielle complexe :

- $z_0 = 5$
- $z_1 = -4$
- $z_2 = 3i$
- $z_3 = -2i$
- $z_4 = 1 + i$
- $z_5 = \sqrt{3} - i$
- $z_6 = z_4 \times z_5$
- $z_7 = z_4^6$
- $z_8 = \frac{z_5^2}{z_4}$

Exercice XXI.12

Déterminer par calcul le module et l'argument principal des complexes :

- $z_1 = -4\sqrt{3} + 4i$
- $z_2 = 1 - i\frac{\sqrt{3}}{3}$
- $z_3 = 2 + 6i$

Exercice XXI.17

Placer dans le plan complexe les points A , B et C d'affixes respectives $e^{i\frac{\pi}{3}}$, $2e^{-i\frac{\pi}{6}}$ et $-3e^{i\frac{3\pi}{4}}$.

Exercice XXI.18

Donner la forme algébrique des complexes :

$$2 \left(\cos \frac{\pi}{12} + i \sin \frac{\pi}{12} \right)$$

$$5 \left(\cos \left(-\frac{3\pi}{4} \right) + i \sin \left(-\frac{3\pi}{4} \right) \right)$$

Exercice XXI.13

Déterminer la forme trigonométrique de :

- $z_1 = 5$
- $z_2 = -3$
- $z_3 = 4i$
- $z_4 = -6 + 6i$
- $z_5 = 3 + 3\sqrt{2}i$
- $z_6 = 6 \left(\cos \frac{\pi}{3} - i \sin \frac{\pi}{3} \right)$
- $z_7 = -2 \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right)$

Exercice XXI.19

Soient $z_1 = \sqrt{2}e^{i\frac{\sqrt{3}\pi}{4}}$ et $z_2 = 1 - i$.

- a) Calculer la forme algébrique de $\frac{z_1}{z_2}$.
- b) Donner la forme exponentielle de z_1 , z_2 et $\frac{z_1}{z_2}$.
- c) En déduire $\cos \frac{\pi}{12}$ et $\sin \frac{\pi}{12}$.

Exercice XXI.14

Déterminer la forme algébrique des complexes :

$$z_1 = \frac{(1+i)^6}{(1-i)^4} \quad \text{et} \quad z_2 = (1+i\sqrt{3})^{10}$$

Exercice XXI.20

Soit $\alpha \in \left] -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right]$.

- a) Résoudre l'équation d'inconnue $z \in \mathbb{C}$:

$$z^2 - 2(\sin \alpha)z + 1 = 0$$

- b) Donner la forme exponentielle de ces solutions.

Exercice XXI.15

Déterminer les écritures algébriques de :

- $z_1 = e^{-i\pi}$
- $z_2 = e^{i\frac{2\pi}{3}}$
- $z_3 = e^{-i\frac{\pi}{2}}$
- $z_4 = e^{i\frac{3\pi}{4}}$
- $z_5 = 5e^{-i\frac{3\pi}{4}}$

Exercice XXI.21

On pose :

$$S = \cos \frac{2\pi}{11} + \cos \frac{4\pi}{11} + \cos \frac{6\pi}{11} + \cos \frac{8\pi}{11} + \cos \frac{10\pi}{11}$$

En utilisant $\omega = e^{i\frac{2\pi}{11}}$, montrer que $S = -\frac{1}{2}$.

Séquence XXI – Nombres complexes (partie 2)

Exercices variés



Exercice XXI.22

La formule de Machin (1706)

Soit $z = \frac{(5+i)^4}{(5-i)^4}$.

1. Montrer que $z = 2 + 2i$.
2. Montrer que $|z| = 2\sqrt{2}$ et que

$$\arg(z) = 4 \arctan\left(\frac{1}{5}\right) - \arctan\left(\frac{1}{239}\right)$$

3. En déduire que :

$$4 \arctan\left(\frac{1}{5}\right) - \arctan\left(\frac{1}{239}\right) = \frac{\pi}{4}[2\pi]$$

4. Soit $\theta = \arctan\left(\frac{1}{5}\right)$. En utilisant le fait que $\tan \frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{\sqrt{6}+\sqrt{2}}$, vérifier que $\tan \theta < \tan \frac{\pi}{12}$.

5. En déduire que $4\theta \in \left]0; \frac{\pi}{3}\right[$ puis que

$$4 \arctan\left(\frac{1}{5}\right) - \arctan\left(\frac{1}{239}\right) \in \left]-\frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{3}\right[$$

6. En déduire enfin la Formule de Machin :

$$4 \arctan\left(\frac{1}{5}\right) - \arctan\left(\frac{1}{239}\right) = \frac{\pi}{4}$$



Exercice XXI.23

On considère le nombre complexe :

$$z = (\sqrt{6} + \sqrt{2}) + i(\sqrt{6} - \sqrt{2})$$

1. Calculer z^2 .
2. Déterminer le module et un argument de z .
3. Préciser les entiers n tels que z^n est imaginaire pur.



Exercice XXI.24

Exprimer, grâce à la formule de De Moivre, $\cos(3\theta)$ et $\sin(3\theta)$ en fonction de $\cos(\theta)$ et $\sin(\theta)$.



Exercice XXI.25

Linéariser $\cos^2(\theta) \sin(\theta)$ et $\cos^3(\theta)$, c'est-à-dire les écrire sous forme de sommes de $\sin(k\theta)$ ou $\cos(k\theta)$, avec k entier.



Exercice XXI.26

1. Soit A, B et C les points d'affixes respectives $1 + i\sqrt{3}$, 2 et $2 + 4i$.
Déterminer $\frac{BA}{BC}$ et une mesure de $(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BA})$.
2. Soit D d'affixe $d = \frac{\sqrt{3}}{4} + i$ et E d'affixe $e = d - i$.
Montrer que le triangle (ODE) est rectangle.



Exercice XXI.27

Le plan est muni du repère orthonormé direct $(O; \vec{u}; \vec{v})$. On donne le nombre complexe

$$j = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Le but de cet exercice est d'étudier quelques propriétés du nombre j et de mettre en évidence un lien de ce nombre avec les triangles équilatéraux.

Partie A : Propriétés du nombre j

1. (a) Résoudre dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes l'équation :
 $z^2 + z + 1 = 0$
(b) Vérifier que le nombre complexe j est solution de cette équation.
2. Déterminer le module et un argument du nombre complexe j , puis donner sa forme exponentielle.
3. Démontrer les égalités suivantes :
(a) $j^3 = 1$
(b) $j^2 = -1 - j$
4. On note P, Q et R les images respectives des nombres complexes $1, j$ et j^2 dans le plan. Quelle est la nature du triangle PQR ? Justifier la réponse.

Partie B

Soit a, b et c trois nombres complexes vérifiant l'égalité $a + jb + j^2c = 0$. On note A, B et C les images respectives des nombres a, b, c dans le plan.

1. En utilisant la question A.3.b, démontrer l'égalité : $a - c = j(c - b)$.
2. En déduire que $AC = BC$.
3. Démontrer l'égalité : $a - b = j^2(c - b)$.
4. En déduire que le triangle ABC est équilatéral.

Séquence XXI – Nombres complexes

Racines n -ièmes d'un nombre complexe



Exercice XXI.28

Déterminer les racines quatrièmes de 2 puis les racines sixièmes de 2.



Exercice XXI.29

Déterminer les racines quatrièmes de $8 - 8i\sqrt{3}$ et de $-7 - 24i$.



Exercice XXI.30

Résoudre l'équation : $z^4 = \frac{1+i}{\sqrt{3}-i}$.



Exercice XXI.31

Résoudre l'équation : $z^{16} - 3z^8 + 2 = 0$.



Exercice XXI.32

Déterminer les racines cubiques de $\frac{1+i\sqrt{3}}{1-i\sqrt{3}}$.



Exercice XXI.33

Déterminer les racines cinquièmes de $\frac{9\sqrt{3}}{2}(1-i\sqrt{3})$.



Exercice XXI.34

Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $(E) : \left(\frac{2z+1}{z-1}\right)^4 = 1$.
Placer les points images des solutions de (E) dans le plan complexe et montrer que ces points sont cocycliques.



Exercice XXI.35

a) Représenter graphiquement l'ensemble des solutions complexes de l'équation (1) : $z^5 = i$.
b) L'entier positif n étant fixé, déterminer l'ensemble des solutions de l'équation

$$(2) : z^n = \frac{1}{\sqrt{2}(1+i)}$$

c) Se peut-il que les équations (1) et (2) aient des solutions communes ?



Exercice XXI.36

a) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation

$$z^2 + 4z + 1 + i(3z + 5) = 0$$

b) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation :

$$(z^2 + 4z + 1)^2 + (3z + 5)^2 = 0$$

c) En déduire une factorisation de

$$(z^2 + 4z + 1)^2 + (3z + 5)^2$$

sous forme du produit de deux polynômes du second degré à coefficients réels.



Exercice XXI.37

On pose $\omega = e^{i\theta}$ où $\theta \in]-\pi; \pi[$.

a) Montrer que $\frac{1-\omega}{1+\omega} = -i \tan \frac{\theta}{2}$. Donner le module et un argument de $\frac{1-\omega}{1+\omega}$.

b) En déduire le module et un argument du nombre complexe z tel que $\frac{2+iz}{2-iz} = \omega$.

c) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation

$$(2+iz)^5 = (2-iz)^5$$



Exercice XXI.38

Résoudre dans $\mathbb{C}$: $(z+1)^n = (z-1)^n$ où $n \in \mathbb{N}^*$.



Exercice XXI.39

On considère le nombre complexe :

$$\omega = \cos \frac{2\pi}{7} + i \sin \frac{2\pi}{7}$$

a) Vérifier que ω est une racine 7^e de 1.

b) On pose

$$S = \omega + \omega^2 + \omega^4 \text{ et } T = \omega^3 + \omega^5 + \omega^6$$

Montrer que S et T sont conjugués et que la partie imaginaire de S est positive.

c) Calculer $S + T$, calculer ST puis en déduire S et T .