

Nombres complexes (partie 2)

1. Représentation géométrique d'un nombre complexe

■ RAPPEL :

On considère un repère orthonormé $(O; \vec{u}, \vec{v})$ du plan.

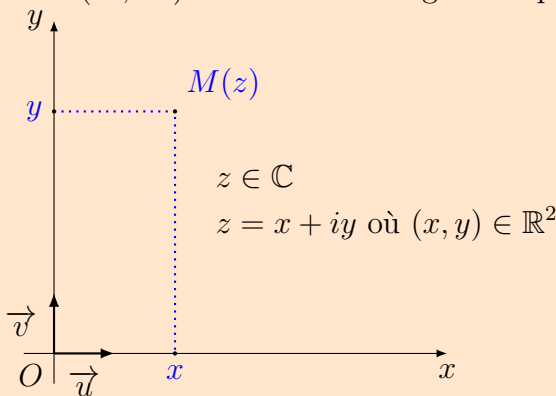
À tout nombre complexe $z = x + iy$ où $(x; y) \in \mathbb{R}^2$ est associé le point de coordonnées $(x; y)$ dans ce plan, qu'on appelle alors plan complexe.

Le point $M(x; y)$ s'appelle l'**image du nombre complexe** z .

Pour tout point $M(x; y)$, le nombre $z = x + iy$ s'appelle l'**affixe du point** M : on peut alors noter $M(z)$.

L'axe $(O; \vec{u})$ est l'axe des réels.

L'axe $(O; \vec{v})$ est l'axe des imaginaires purs.



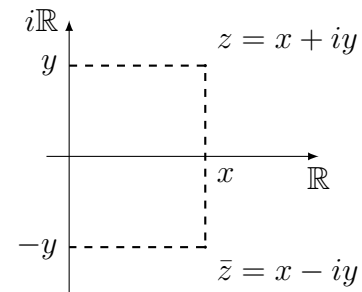
Les définitions et propriétés suivantes sont des reformulations en termes d'affixe, de leurs analogues en termes de coordonnées.

- Pour tous points $A(z_A)$ et $B(z_B)$ du plan, on définit de même l'affixe du vecteur $\vec{AB}$ par $\text{aff}(\vec{AB}) = z_B - z_A$.
- Le milieu I du segment $[AB]$ a pour affixe :

$$\text{aff}(I) = \frac{1}{2}(z_A + z_B)$$

- Les points $A(z_A)$, $B(z_B)$ et $C(z_C)$, deux à deux distincts, sont alignés si et seulement si $\vec{AB}$ et $\vec{AC}$ colinéaires si et seulement si $\exists k \in \mathbb{R}, (z_B - z_A) = k(z_C - z_A)$
- Le quadrilatère $ABCD$ est un parallélogramme si et seulement si $\vec{AB} = \vec{DC}$ si et seulement si $z_B - z_A = z_C - z_D$.

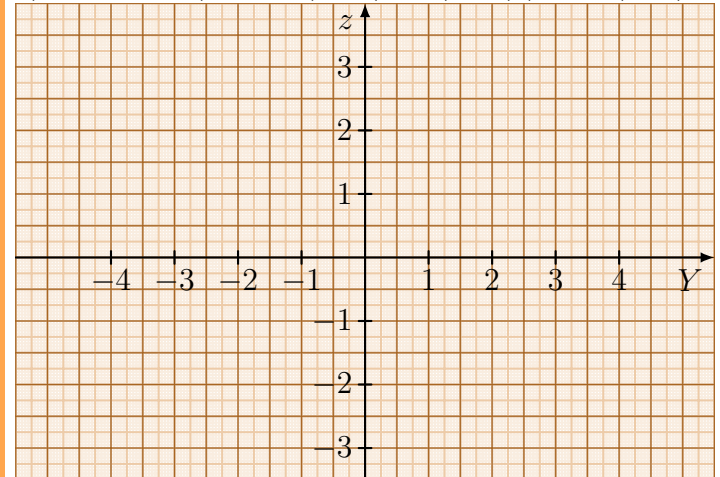
Remarque : Les images M et M' respectives des complexes z et $\bar{z}$ sont symétriques par rapport à l'axe des réels $(O; \vec{u})$.



Exemple :

Dans le plan complexe muni du repère orthonormé $(O; \vec{u}, \vec{v})$.

a) Placer : $A(-3 - 2i)$, $B(1 + i)$, $C(4)$ et $D(-3i)$.



b) Montrer que le quadrilatère $ABCD$ est un parallélogramme.

On calcule :

$$\begin{aligned} z_B - z_A &= (1 + i) - (-3 - 2i) \\ &= 4 + 3i \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} z_C - z_D &= 4 - (-3i) \\ &= 4 + 3i \end{aligned}$$

Donc $z_B - z_A = z_C - z_D$, ce qui prouve que $ABCD$ est un parallélogramme.

c) Calculer les coordonnées de son centre G .

Le centre G est le milieu de la diagonale $[AC]$:

$$\begin{aligned} z_G &= \frac{z_A + z_C}{2} \\ &= \frac{(-3 - 2i) + 4}{2} \\ &= \frac{1 - 2i}{2} \\ &= \frac{1}{2} - i \end{aligned}$$

Donc $G\left(\frac{1}{2}; -1\right)$.

Exemple :

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{C}$ par $f(z) = z^2 - 2\bar{z} + 1$. On note M le point d'affixe z et M' le point d'affixe $f(z)$.

a) Déterminer l'ensemble $(\mathcal{E})$ des points M du plan complexe tels que $f(z)$ est réel.

Posons $z = x + iy$ où $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

$$\begin{aligned} f(z) &= z^2 - 2\bar{z} + 1 \\ &= (x + iy)^2 - 2(x - iy) + 1 \\ &= x^2 + 2ixy - y^2 - 2x + 2iy + 1 \\ &= (x^2 - y^2 - 2x + 1) + i(2xy + 2y) \end{aligned}$$

La partie imaginaire de $f(z)$ est :

$$\begin{aligned} \operatorname{Im}(f(z)) &= 2xy + 2y \\ &= 2y(x + 1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(z) \in \mathbb{R} &\Leftrightarrow \operatorname{Im}(f(z)) = 0 \\ &\Leftrightarrow 2y(x + 1) = 0 \\ &\Leftrightarrow y = 0 \text{ ou } x = -1 \end{aligned}$$

L'ensemble $(\mathcal{E})$ est la réunion de l'axe des abscisses et de la droite verticale d'équation $x = -1$.

b) Déterminer l'ensemble $(\mathcal{F})$ des points M du plan complexe tels que $f(z) = 0$.

$$\begin{aligned} f(z) = 0 &\Leftrightarrow z^2 - 2\bar{z} + 1 = 0 \\ &\Leftrightarrow (x^2 - y^2 - 2x + 1) + i(2xy + 2y) = 0 \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - y^2 - 2x + 1 = 0 \\ 2y(x + 1) = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

De la deuxième équation : $y = 0$ ou $x = -1$.

Si $y = 0$: $x^2 - 2x + 1 = 0 \Leftrightarrow (x - 1)^2 = 0 \Leftrightarrow x = 1$.
On obtient le point $z = 1$.

Si $x = -1$: $1 - y^2 + 2 + 1 = 0 \Leftrightarrow y^2 = 4 \Leftrightarrow y = \pm 2$.
On obtient les points $z = -1 + 2i$ et $z = -1 - 2i$.

L'ensemble $(\mathcal{F})$ est constitué de 3 points distincts, d'affixes

$$1, -1 + 2i \text{ et } -1 - 2i.$$

Exemple :

Soit g la fonction définie, pour tout $z \in \mathbb{C} \setminus \{-2i\}$, par $g(z) = \frac{z - 4 - 2i}{z + 2i}$. On note M le point d'affixe z et M' le point d'affixe $g(z)$.

a) Déterminer l'ensemble $(\mathcal{E})$ des points M du plan complexe tels que $g(z)$ est réel.

Posons $z = x + iy$ où $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

$$g(z) = \frac{(x + iy) - 4 - 2i}{(x + iy) + 2i} = \frac{(x - 4) + i(y - 2)}{x + i(y + 2)}$$

$$\begin{aligned} \text{i.e. } g(z) &= \frac{[(x - 4) + i(y - 2)][x - i(y + 2)]}{[x + i(y + 2)][x - i(y + 2)]} \\ &= \frac{(x - 4)x - i(x - 4)(y + 2) + ix(y - 2) - i^2(y - 2)(y + 2)}{x^2 - [i(y + 2)]^2} \\ &= \frac{(x - 4)x + (y - 2)(y + 2) + i[-(x - 4)(y + 2) + x(y - 2)]}{x^2 + (y + 2)^2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \operatorname{Im}(g(z)) &= \frac{-(x - 4)(y + 2) + x(y - 2)}{x^2 + (y + 2)^2} \\ &= \frac{-xy - 2x + 4y + 8 + xy - 2x}{x^2 + (y + 2)^2} \\ &= \frac{-4x + 4y + 8}{x^2 + (y + 2)^2} = \frac{4(-x + y + 2)}{x^2 + (y + 2)^2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} T(z) \in \mathbb{R} &\Leftrightarrow \operatorname{Im}(g(z)) = 0 \Leftrightarrow -x + y + 2 = 0 \\ &\Leftrightarrow y = x - 2 \end{aligned}$$

L'ensemble $(\mathcal{E})$ est la droite d'équation $y = x - 2$, privée du point d'affixe $-2i$ (pour lequel $g(z)$ n'est pas défini).

b) Déterminer l'ensemble $(\mathcal{F})$ des points M du plan complexe tels que $g(z)$ est imaginaire pur.

La partie réelle de $g(z)$ est :

$$\begin{aligned} \operatorname{Re}(g(z)) &= \frac{(x - 4)x + (y - 2)(y + 2)}{x^2 + (y + 2)^2} \\ &= \frac{x^2 - 4x + y^2 - 4}{x^2 + (y + 2)^2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} g(z) \in i\mathbb{R} &\Leftrightarrow \operatorname{Re}(g(z)) = 0 \\ &\Leftrightarrow x^2 - 4x + y^2 - 4 = 0 \\ &\Leftrightarrow x^2 - 4x + 4 + y^2 - 4 - 4 = 0 \\ &\Leftrightarrow (x - 2)^2 + y^2 = 8 \end{aligned}$$

L'ensemble $(\mathcal{F})$ est le cercle de centre $\Omega(2; 0)$ et de rayon $2\sqrt{2}$, privé du point d'affixe $-2i$ si celui-ci appartient au cercle.

Or, le point d'affixe $-2i$ appartient au cercle, donc l'ensemble $(\mathcal{F})$ est le cercle de centre $\Omega(2; 0)$ et de rayon $2\sqrt{2}$, privé du point d'affixe $-2i$.

2. Module d'un nombre complexe

■ DÉFINITION :

Soit $z = x + iy$ où $(x; y) \in \mathbb{R}^2$ un nombre complexe. Le **module** de z , noté $|z|$ est le nombre réel positif défini par $|z| = \sqrt{z\bar{z}} = \sqrt{x^2 + y^2}$.

Exemples :

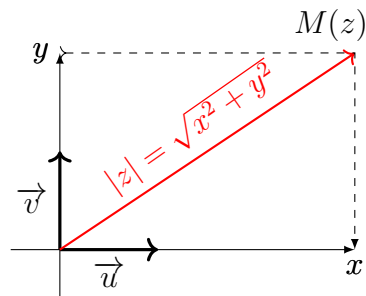
$$|1 - 2i| = \sqrt{1^2 + (-2)^2} = \sqrt{5}$$

$$|-3| = \sqrt{(-3)^2 + 0^2} = 3 \text{ et } |5i| = \sqrt{5^2} = 5$$

Remarque : Lorsque $z \in \mathbb{R}$, le module de z n'est autre que la valeur absolue de z , d'où la notation. De plus, la notation $\sqrt{z\bar{z}}$ est autorisée car $z\bar{z} \in \mathbb{R}_+^*$.

Remarque : Dans le plan complexe muni du repère orthonormé $(O; \vec{u}, \vec{v})$, si M a pour affixe $z = x + iy$ alors

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2} = OM$$



Exemple :

Calculer $|1|$; $|i|$; $|1 + i|$; $\left| -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i \right|$.

$$\begin{aligned} |1| &= 1 & |i| &= 1 & |1 + i| &= \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2} \\ \left| -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i \right| &= \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{3}{4}} = 1 \end{aligned}$$

■ DÉFINITION :

On note $\mathbb{U}$ l'ensemble des nombres complexes de module 1, c'est-à-dire

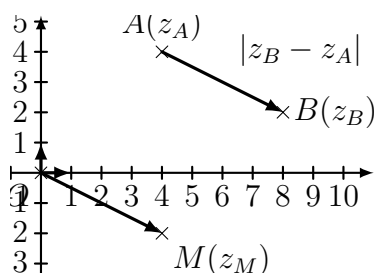
$$\mathbb{U} = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$$

Remarque : Géométriquement, l'ensemble $\mathbb{U}$ est l'ensemble des points qui sont à distance 1 de l'origine. C'est le cercle de centre l'origine du repère et de rayon 1.

■ PROPRIÉTÉ :

Dans le plan complexe muni du repère orthonormé $(O; \vec{u}, \vec{v})$, si $A(z_A)$ et $B(z_B)$ alors

$$AB = |z_B - z_A|$$



Démonstration. Considérons le point M du plan complexe tel que $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OM}$.

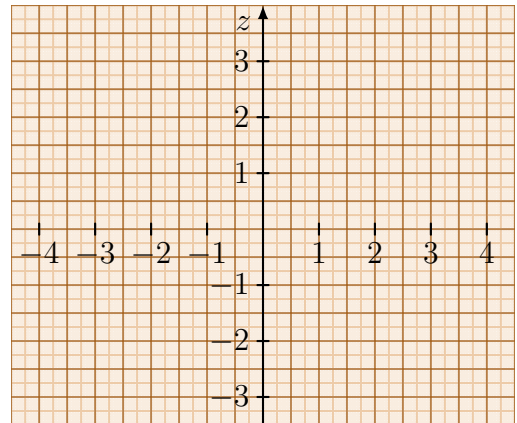
Alors $\text{aff}(\overrightarrow{AB}) = \text{aff}(\overrightarrow{OM})$ donc $z_B - z_A = z_M - z_O$ et donc $z_M = z_B - z_A$ et par conséquent :

$$|z_M| = |z_B - z_A|$$

Finalement : $OM = AB = |z_B - z_A|$. □

Exemple :

Dans le plan complexe muni du repère orthonormé $(O; \vec{u}, \vec{v})$, soient les points : $A(3 + i)$, $B(-1 + 3i)$, $C(-3 - i)$ et $D(1 - 3i)$.



Quelle est la nature du quadrilatère $ABCD$?

Calculons les longueurs des côtés :

$$\begin{aligned} AB &= |(-1 + 3i) - (3 + i)| \\ &= |-4 + 2i| \\ &= \sqrt{16 + 4} \\ &= \sqrt{20} \\ &= 2\sqrt{5} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} BC &= |(-3 - i) - (-1 + 3i)| \\ &= |-2 - 4i| \\ &= \sqrt{4 + 16} \\ &= 2\sqrt{5} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} CD &= |(1 - 3i) - (-3 - i)| \\ &= |4 - 2i| \\ &= \sqrt{16 + 4} \\ &= 2\sqrt{5} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} DA &= |(3 + i) - (1 - 3i)| \\ &= |2 + 4i| \\ &= \sqrt{4 + 16} \\ &= 2\sqrt{5} \end{aligned}$$

Tous les côtés ont la même longueur, donc $ABCD$ est un losange. Calculons les longueurs des diagonales :

$$\begin{aligned} AC &= |(-3 - i) - (3 + i)| \\ &= |-6 - 2i| \\ &= \sqrt{36 + 4} \\ &= \sqrt{40} \\ &= 2\sqrt{10} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} BD &= |(1 - 3i) - (-1 + 3i)| \\ &= |2 - 6i| \\ &= \sqrt{4 + 36} \\ &= \sqrt{40} \\ &= 2\sqrt{10} \end{aligned}$$

Les diagonales ont la même longueur, donc $ABCD$ est un carré.

Exemple :

Sans aucun calcul, déterminer l'ensemble $(\mathcal{C})$ des points M d'affixe z tels que : $|z - i| = 2$.

$|z - i| = 2$ signifie que la distance du point $M(z)$ au point d'affixe i est égale à 2.

L'ensemble $(\mathcal{C})$ est donc le cercle de centre le point d'affixe i et de rayon 2.

Exemple :

Sans aucun calcul, déterminer et construire l'ensemble $(\mathcal{D})$ des points M d'affixe z tels que : $|z - 2i| = |z + 3|$.

$|z - 2i| = |z + 3|$ signifie que le point $M(z)$ est équidistant des points $A(2i)$ et $B(-3)$

L'ensemble $(\mathcal{D})$ est donc la médiatrice du segment $[AB]$.

■ PROPRIÉTÉ :

Pour tout couple $(z; z') \in \mathbb{C}^2$,

- (i) $|z| = 0 \Leftrightarrow z = 0$
- (ii) $|z \times z'| = |z| \times |z'|$
- (iii) Si $z' \neq 0$, $\left|\frac{1}{z'}\right| = \frac{1}{|z'|}$ et $\left|\frac{z}{z'}\right| = \frac{|z|}{|z'|}$
- (iv) $\forall n \in \mathbb{Z} : |z^n| = |z|^n$ avec $z \neq 0$ si $n \leq 0$.
- (v) $|z + z'| \leq |z| + |z'|$ (Inégalité triangulaire)

Démonstration.

- (i) Soit $z \in \mathbb{C}$. Alors il existe $(a; b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $z = a + ib$. Donc

$$\begin{aligned} |z| = 0 &\Leftrightarrow \sqrt{a^2 + b^2} = 0 \\ &\Leftrightarrow a^2 + b^2 = 0 \end{aligned}$$

Or, $a^2 \geq 0$ et $b^2 \geq 0$, donc

$$\begin{aligned} a^2 + b^2 = 0 &\Leftrightarrow a^2 = 0 \text{ et } b^2 = 0 \\ &\Leftrightarrow a = 0 \text{ et } b = 0 \\ &\Leftrightarrow z = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{(ii)} \quad |z \times z'|^2 &= (zz')(\overline{zz'}) \\ &= zz'\overline{z}\overline{z'} \\ &= z\overline{z} \times z'\overline{z'} \\ &= |z|^2 |z'|^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{(iii)} \quad \left|\frac{1}{z'}\right|^2 &= \frac{1}{z'} \times \overline{\left(\frac{1}{z'}\right)} \\ &= \frac{1}{z'} \times \frac{1}{\overline{z'}} \\ &= \frac{1}{z'\overline{z'}} \\ &= \frac{1}{|z'|^2} \end{aligned}$$

La bijectivité de la fonction racine carrée sur $\mathbb{R}_+$ nous permet de conclure que $\left|\frac{1}{z'}\right| = \frac{1}{|z'|}$.

Puis

$$\begin{aligned} \left|\frac{z}{z'}\right| &= \left|z \times \frac{1}{z'}\right| \\ &= |z| \times \left|\frac{1}{z'}\right| \text{ d'après (ii)} \\ &= |z| \times \frac{1}{|z'|} \text{ d'après ce qui précède} \\ &= \frac{|z|}{|z'|} \end{aligned}$$

- (iv) Soit P_n la propriété « $|z^n| = |z|^n$ ».

- Montrons que cette propriété est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

- Initialisation : si $n = 1$, alors $|z^1| = |z|$ et $|z|^1 = |z|$, donc $|z^1| = |z|^1$.

Donc la propriété est initialisée.

- Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On suppose que $|z^n| = |z|^n$. Alors

$$\begin{aligned} |z^{n+1}| &= |z^n \times z| \\ &= |z^n| \times |z| \text{ d'après (ii)} \\ &= |z|^n \times |z| \text{ d'après (HR)} \\ &= |z|^{n+1} \end{aligned}$$

Donc la propriété est héréditaire.

Conclusion : on a montré par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $|z^n| = |z|^n$

- Pour $n = 0$ et $z \neq 0$,

$$\begin{aligned}|z^0| &= |1| \\ &= 1 \\ &= |z|^0\end{aligned}$$

- Enfin, soit $n \in \mathbb{Z}_-$ et $z \neq 0$.
Ainsi, $m = -n \in \mathbb{N}^*$.

$$\begin{aligned}|z^n| &= |z^{-m}| \\ &= \left| \frac{1}{z^m} \right| \\ &= \frac{1}{|z^m|} \text{ d'après (iii)} \\ &= \frac{1}{|z|^m} \text{ car } m \in \mathbb{N} \\ &= |z|^{-m} \\ &= |z|^n\end{aligned}$$

(v)

$$\begin{aligned}|z + z'|^2 &= (z + z')\overline{(z + z')} \\ &= |z|^2 + z\overline{z'} + \overline{z}z' + |z'|^2\end{aligned}$$

Or

$$\begin{aligned}z\overline{z'} + \overline{z}z' &= z\overline{z'} + \overline{z\overline{z'}} \\ &= 2\operatorname{Re}(z\overline{z'})\end{aligned}$$

Comme pour tout complexe w : $\operatorname{Re}(w) \leq |w|$, on en déduit

$$\begin{aligned}|z + z'|^2 &\leq |z|^2 + 2|z\overline{z'}| + |z'|^2 \\ &= |z|^2 + 2|z||\overline{z'}| + |z'|^2 \\ &= (|z| + |z'|)^2\end{aligned}$$

puis on parvient à l'inégalité triangulaire par croissance de la fonction racine carrée.

□

Remarque : Ces calculs montrent l'efficacité de l'utilisation des propriétés de la conjugaison.

On peut aussi obtenir ces résultats en utilisant la forme algébrique de $z = x + iy$ et de $z' = x' + iy'$ où $(x; y; x'; y') \in \mathbb{R}^4$ mais c'est plus long.

On peut en outre remarquer que l'égalité

$$|z \times z'| = |z| \times |z'|$$

se réécrit en utilisant la forme algébrique sous la forme :

$$(xx' - yy')^2 + (xy' + yx')^2 = (x^2 + y^2)(x'^2 + y'^2)$$

Cette égalité s'appelle l'Identité de Diophante¹ (cas particulier de l'égalité de Lagrange²) et sert par exemple à justifier que si deux entiers sont sommes de deux carrés d'entiers ($x^2 + y^2$ et $x'^2 + y'^2$), alors leur produit l'est aussi, puisqu'il s'écrit sous la forme $(xx' - yy')^2 + (xy' + yx')^2$.

Exemples :

- 1) Calculer le module de $\frac{(2 + 3i)^2}{(1 - i)^5}$.

$$\left| \frac{(2 + 3i)^2}{(1 - i)^5} \right| = \frac{|2 + 3i|^2}{|1 - i|^5} = \frac{(\sqrt{4 + 9})^2}{(\sqrt{1 + 1})^5}$$

$$\text{i.e. } \left| \frac{(2 + 3i)^2}{(1 - i)^5} \right| = \frac{13}{(\sqrt{2})^5} = \frac{13}{4\sqrt{2}} = \frac{13\sqrt{2}}{8}$$

- 2) Quel est l'ensemble des points $M(z)$ tels que

$$\left| \frac{z - 1 + i}{z - 1} \right| = 1 ?$$

$$\left| \frac{z - 1 + i}{z - 1} \right| = 1 \Leftrightarrow |z - 1 + i| = |z - 1|$$

Cela signifie que le point $M(z)$ est équidistant des points d'affixes $1 - i$ et 1 . L'ensemble est donc la médiatrice du segment joignant ces deux points, c'est-à-dire la droite d'équation $y = -\frac{1}{2}$.

La valeur $z = 1$ n'a pas besoin d'être exclue.

Exemple :

Soit $z \in \mathbb{C} \setminus \{1\}$. On note M le point du plan complexe d'affixe z .

On pose : $w = \frac{2iz + 1}{z - 1}$.

- a) Déterminer l'ensemble $\mathcal{E}$ des points du plan complexe tels que w est imaginaire pur.

$$w \in i\mathbb{R} \Leftrightarrow \operatorname{Re}(w) = 0$$

Posons $z = x + iy$ avec $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ et $z \neq 1$.

Calculons w en fonction de x et y :

$$\begin{aligned}w &= \frac{2iz + 1}{z - 1} = \frac{2i(x + iy) + 1}{(x + iy) - 1} \\ &= \frac{2ix - 2y + 1}{(x - 1) + iy} \\ &= \frac{(1 - 2y) + 2ix}{(x - 1) + iy}\end{aligned}$$

1. Diophante d'Alexandrie est un mathématicien qui a étudié certaines équations utilisant les nombres entiers, appelées aujourd'hui équations diophantiennes.

2. Joseph Louis de Lagrange (1736-1813), est un mathématicien, mécanicien et astronome italien, naturalisé français.

Multiplions le numérateur et le dénominateur par le conjugué du dénominateur :

$$\begin{aligned} w &= \frac{[(1-2y) + 2ix][(x-1) - iy]}{[(x-1) + iy][(x-1) - iy]} \\ &= \frac{(1-2y)(x-1) + 2xy + i[2x(x-1) - y(1-2y)]}{(x-1)^2 + y^2} \\ &= \frac{(1-2y)(x-1) + 2xy + i[2x^2 - 2x - y + 2y^2]}{(x-1)^2 + y^2} \end{aligned}$$

Développons la partie réelle :

$$\begin{aligned} \operatorname{Re}(w) &= \frac{(1-2y)(x-1) + 2xy}{(x-1)^2 + y^2} \\ &= \frac{x-1-2xy+2y+2xy}{(x-1)^2 + y^2} \\ &= \frac{x+2y-1}{(x-1)^2 + y^2} \end{aligned}$$

Donc :

$$\begin{aligned} w \in i\mathbb{R} &\iff \operatorname{Re}(w) = 0 \\ &\iff x+2y-1 = 0 \quad (\text{car } (x-1)^2 + y^2 \neq 0) \\ &\iff x+2y = 1 \end{aligned}$$

L'ensemble $\mathcal{E}$ est la droite d'équation $x+2y=1$, privée du point $(1; 0)$.

Remarque : L'équation de cette droite peut s'écrire

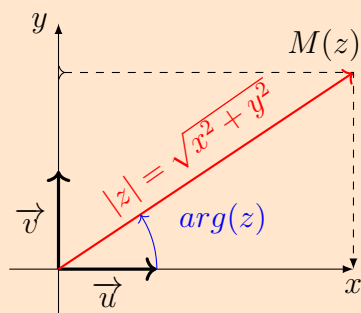
$$y = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}x$$

3. Argument d'un nombre complexe non nul. Notation exponentielle

■ DÉFINITION :

Soit z un nombre complexe non nul et M l'image de z dans le plan complexe muni du repère orthonormé $(O; \vec{u}, \vec{v})$.

On appelle **argument** de z et on note $\arg(z)$ toute mesure de l'angle $(\vec{u}, \overrightarrow{OM})$.



Exemples :

1) D'après la définition :

$$\begin{aligned} \arg(3) &\equiv 0[2\pi] & \arg(i) &\equiv \frac{\pi}{2}[2\pi] \\ \arg(-2) &\equiv \pi[2\pi] & \arg(1+i) &\equiv \frac{\pi}{4}[2\pi] \end{aligned}$$

2) Les caractérisations suivantes sont très utiles :

$$z \in \mathbb{R}_+^* \iff \arg(z) \equiv 0[2\pi]$$

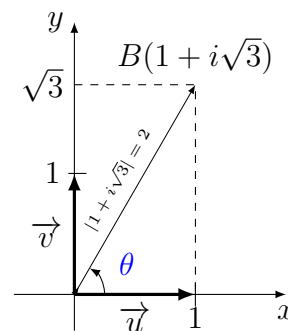
$$z \in \mathbb{R}_-^* \iff \arg(z) \equiv \pi[2\pi]$$

Et plus généralement : $z \in \mathbb{R}^* \iff \arg(z) \equiv 0[\pi]$.

$$z \in i\mathbb{R}^* \iff \arg(z) \equiv \frac{\pi}{2}[\pi].$$

3) Comment procéder lorsque le résultat est moins évident ?

Calculons par exemple $\arg(1+i\sqrt{3})$.
Notons θ une mesure de $\arg(1+i\sqrt{3})$.



$$\text{On a : } \begin{cases} \cos \theta = \frac{1}{\sqrt{1^2 + (\sqrt{3})^2}} = \frac{1}{2} \\ \sin \theta = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{1^2 + (\sqrt{3})^2}} = \frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$$

d'où l'on déduit que : $\theta = \arg(1+i\sqrt{3}) \equiv \frac{\pi}{3}[2\pi]$.

Remarquons qu'on peut alors écrire

$$\begin{aligned} 1 + \sqrt{3}i &= \sqrt{1^2 + (\sqrt{3})^2} \cos \frac{\pi}{3} + i \sqrt{1^2 + (\sqrt{3})^2} \sin \frac{\pi}{3} \\ &= 2 \left(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3} \right) \end{aligned}$$

■ DÉFINITION :

On dit aussi que le couple $\left(2; \frac{\pi}{3}\right)$ est le **couple des coordonnées polaires** du point B de coordonnées cartésiennes $(1; \sqrt{3})$.

Plus généralement :

Tout point M du plan muni du repère orthonormé $(O; \vec{u}, \vec{v})$ peut être repéré par ses coordonnées polaires : (distance OM ; angle $(\vec{u}, \overrightarrow{OM})$).

■ DÉFINITION :

Si la forme algébrique d'un complexe non nul z est $z = x + iy$ où $(x; y) \in \mathbb{R}^2$ alors sa **forme trigonométrique** est

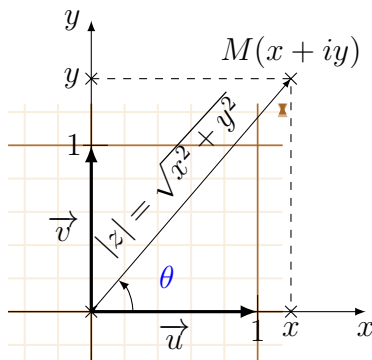
$$z = r(\cos \theta + i \sin \theta)$$

où $r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2}$ et $\theta = \arg(z)$, que l'on

détermine avec :

$$\begin{cases} \cos \theta = \frac{x}{r} \\ \sin \theta = \frac{y}{r} \end{cases}.$$

Inversement, si la forme trigonométrique du complexe z est $z = r(\cos \theta + i \sin \theta)$ alors sa forme algébrique est $z = r \cos \theta + ir \sin \theta$.



Exemples :

1) Dans l'exemple précédent, la forme trigonométrique de $1 + i\sqrt{3}$ est

$$2 \left(\cos \left(\frac{\pi}{3} \right) + i \sin \left(\frac{\pi}{3} \right) \right)$$

2) Donner la forme trigonométrique des complexes :

$$-\pi \quad 2i \quad -3i \quad 1 - i \quad -3 + 3i$$

Pour $\alpha \in \mathbb{R} : \cos \alpha - i \sin \alpha$

Pour $\alpha \in \mathbb{R} : -2(\cos \alpha + i \sin \alpha)$

$$-\pi = \pi(\cos \pi + i \sin \pi)$$

$$2i = 2 \left(\cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2} \right)$$

$$-3i = 3 \left(\cos \left(-\frac{\pi}{2} \right) + i \sin \left(-\frac{\pi}{2} \right) \right)$$

$$1 - i = \sqrt{2} \left(\cos \left(-\frac{\pi}{4} \right) + i \sin \left(-\frac{\pi}{4} \right) \right)$$

$$-3 + 3i = 3\sqrt{2} \left(\cos \frac{3\pi}{4} + i \sin \frac{3\pi}{4} \right)$$

$$\cos \alpha - i \sin \alpha = \cos(-\alpha) + i \sin(-\alpha)$$

$$-2(\cos \alpha + i \sin \alpha) = 2(\cos(\alpha + \pi) + i \sin(\alpha + \pi))$$

Remarque : Le complexe 0 n'a pas de forme trigonométrique.

Intéressons-nous maintenant aux propriétés de l'argument d'un nombre complexe non nul :

■ PROPRIÉTÉ :

Pour tout $(z; z') \in (\mathbb{C}^*)^2$ et tout $n \in \mathbb{Z}$:

$$(i) \arg(z \times z') \equiv \arg(z) + \arg(z') [2\pi]$$

$$(ii) \arg(z^n) \equiv n \arg(z) [2\pi]$$

$$(iii) \arg\left(\frac{1}{z}\right) \equiv -\arg(z) [2\pi]$$

$$(iv) \arg\left(\frac{z}{z'}\right) \equiv (\arg(z) - \arg(z')) [2\pi]$$

Démonstration.

(i) Si $z = r(\cos \theta + i \sin \theta)$ et $z' = r'(\cos \theta' + i \sin \theta')$ alors

$$\begin{aligned} zz' &= rr'(\cos \theta \cos \theta' - \sin \theta \sin \theta') \\ &\quad + i(\cos \theta \sin \theta' + \cos \theta' \sin \theta) \\ &= rr'(\cos(\theta + \theta') + i \sin(\theta + \theta')) \end{aligned}$$

où $rr' > 0$ et $\theta + \theta' \in \mathbb{R}$, donc ceci est la forme trigonométrique de zz' et donc :

rr' est son module (on le savait déjà)

et $\arg(z \times z') = \arg(z) + \arg(z') [2\pi]$

(ii) Par récurrence.

(iii) De plus

$$\begin{aligned} \frac{1}{z} &= \frac{1}{r(\cos \theta + i \sin \theta)} \\ &= \frac{1}{r} \frac{\cos \theta - i \sin \theta}{\cos^2 \theta + \sin^2 \theta} \\ &= \frac{1}{r} (\cos \theta - i \sin \theta) \\ &= \frac{1}{r} (\cos(-\theta) + i \sin(-\theta)) \end{aligned}$$

où $\frac{1}{r} > 0$ et $-\theta \in \mathbb{R}$, donc ceci est la forme trigonométrique de $\frac{1}{z}$ et donc $\frac{1}{r}$ est son module (on le savait déjà) et $\arg\left(\frac{1}{z}\right) = -\arg(z) [2\pi]$.

(iv)

$$\begin{aligned} \arg\left(\frac{z}{z'}\right) &= \arg\left(z \times \frac{1}{z'}\right) [2\pi] \\ &\equiv \arg(z) + \arg\left(\frac{1}{z'}\right) \text{ d'après (i)} [2\pi] \\ &\equiv \arg(z) - \arg(z') [2\pi] \text{ d'après (iii)} \end{aligned}$$

□

Exemple :

Calculer un argument du complexe : $\frac{(\sqrt{3} + i)^2}{(1 + i)^5}$.

$$\arg(\sqrt{3} + i) = \frac{\pi}{6} \text{ car } \sqrt{3} + i = 2 \left(\cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6} \right)$$

$$\arg(1 + i) = \frac{\pi}{4} \text{ car } 1 + i = \sqrt{2} \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right)$$

Donc

$$\begin{aligned} \arg \left(\frac{(\sqrt{3} + i)^2}{(1 + i)^5} \right) &= 2 \arg(\sqrt{3} + i) - 5 \arg(1 + i) \\ &= 2 \times \frac{\pi}{6} - 5 \times \frac{\pi}{4} \\ &= \frac{\pi}{3} - \frac{5\pi}{4} \\ &= -\frac{11\pi}{12} [2\pi] \end{aligned}$$

Remarque : Ainsi, les arguments des nombres complexes ont les mêmes propriétés que les logarithmes. C'est-à-dire que si l'on décide de noter les arguments comme des exposants, leurs propriétés deviendront naturelles lors des calculs. Les propriétés du module étant également naturelles sous cette écriture, on va donc décider de noter le nombre $z = r(\cos \theta + i \sin \theta)$ sous la forme $z = re^{i\theta}$: cette notation est la **forme exponentielle** du complexe z .

Exemples :

- 3 est le nombre de module 3 et argument $0[2\pi]$ donc : $3 = 3e^{i0} = 3e^{2i\pi}$
- -3 est le nombre de module 3 et argument $\pi[2\pi]$ donc $-3 = 3e^{i\pi}$
- i est le nombre de module 1 et argument $\frac{\pi}{2}[2\pi]$ donc $i = 1e^{i\frac{\pi}{2}} = e^{i\frac{\pi}{2}}$.
- Sans calcul, que vaut : $e^{i\pi} + 1$?
 $e^{i\pi} = -1$, donc $e^{i\pi} + 1 = 0$.
- $z = 2e^{i\frac{\pi}{6}}$ est le nombre de module 2 et dont un argument est $\frac{\pi}{6}$.
- $z' = \frac{1}{2}e^{-i\frac{\pi}{3}}$ est le nombre de module $\frac{1}{2}$ est dont un argument est $-\frac{\pi}{3}$.

$$\begin{aligned} zz' &= 2e^{i\frac{\pi}{6}} \times \frac{1}{2}e^{-i\frac{\pi}{3}} \\ &= 2 \times \frac{1}{2} \times e^{i\frac{\pi}{6}} \times e^{-i\frac{\pi}{3}} \\ &= 1e^{i\frac{\pi}{6} - i\frac{\pi}{3}} \\ &= 1e^{-i\frac{\pi}{6}} \end{aligned}$$

■ DÉFINITION :

Pour tout complexe z non nul, on appelle **forme exponentielle du complexe** z son écriture sous la forme $z = re^{i\theta}$ où $r = |z|$ et $\theta \equiv \arg(z)[2\pi]$.

En résumé :

Un nombre complexe non nul z peut s'écrire sous trois formes différentes :

- sa **forme algébrique** :

$$z = x + iy$$

où $(x; y) \in \mathbb{R}^2$: cette forme est particulièrement adaptée pour ajouter des nombres complexes.

- sa **forme trigonométrique** :

$$z = r(\cos \theta + i \sin \theta)$$

où $r = |z|$ et $\theta \equiv \arg(z)[2\pi]$.

- sa **forme exponentielle**, qui est une réécriture de la forme trigonométrique sous une forme qui est particulièrement adaptée aux calculs de produits et de quotients.

■ PROPRIÉTÉ : Formule de De Moivre³

Pour tout $\theta \in \mathbb{R}$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$(\cos \theta + i \sin \theta)^n = \cos(n\theta) + i \sin(n\theta)$$

Démonstration.

On peut observer, que pour tout entier naturel n et tout réel θ ,

$$\begin{aligned} (\cos \theta + i \sin \theta)^n &= (e^{i\theta})^n \\ &= e^{in\theta} \\ &= \cos(n\theta) + i \sin(n\theta) \end{aligned}$$

□

Remarque : Observons également que le nombre $\overline{e^{i\theta}}$, conjugué de $e^{i\theta}$ a pour module 1 et pour argument $-\theta$, puisque son image est symétrique de celle de $e^{i\theta}$ par rapport à l'axe $(O; \vec{u})$. Par conséquent : $\overline{e^{i\theta}} = e^{-i\theta}$.

Remarque : Le nombre $e^{i\theta}$, c'est-à-dire $1 \times e^{i\theta}$ est un nombre de module 1, donc $e^{i\theta} \in \mathbb{U}$.

On a

$$e^{i\theta} + e^{-i\theta} = e^{i\theta} + \overline{e^{i\theta}} = 2\operatorname{Re}(e^{i\theta}) = 2 \cos \theta$$

$$\text{d'où : } \cos \theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}.$$

De plus

$$e^{i\theta} - e^{-i\theta} = e^{i\theta} - \overline{e^{i\theta}} = 2i\operatorname{Im}(e^{i\theta}) = 2i \sin \theta$$

$$\text{d'où : } \sin \theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}.$$

3. Abraham de Moivre, mathématicien français (1667-1754).

■ PROPRIÉTÉ : Formules d'Euler

Pour tout réel θ ,

$$\cos \theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} \text{ et } \sin \theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}$$

Exemple :

Pour trouver une primitive sur $\mathbb{R}$ de la fonction $f : x \mapsto \cos^4 x$, on peut linéariser $\cos^4 x$ c'est-à-dire transformer ce produit en somme. Les formules d'Euler permettent de le faire efficacement :

$$\begin{aligned} \cos^4 x &= \left(\frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} \right)^4 \\ &= \frac{1}{16} [(e^{ix})^4 + 4(e^{ix})^3(e^{-ix}) + 6(e^{ix})^2(e^{-ix})^2 \\ &\quad + 4(e^{ix})(e^{-ix})^3 + (e^{-ix})^4] \\ &= \frac{1}{16} [e^{4ix} + 4e^{2ix} + 6 + 4e^{-2ix} + e^{-4ix}] \\ &= \frac{1}{16} [2\cos 4x + 8\cos 2x + 6] \\ &= \frac{1}{8} \cos 4x + \frac{1}{2} \cos 2x + \frac{3}{8} \end{aligned}$$

Par conséquent, une primitive de f est F définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ par

$$F(x) = \frac{1}{32} \sin 4x + \frac{1}{4} \sin 2x + \frac{3}{8}x$$

4. Quelques utilisations des nombres complexes en géométrie

■ PROPRIÉTÉ :

Dans le plan complexe muni du repère orthonormé $(O; \vec{u}, \vec{v})$, si $A(z_A)$ et $B(z_B)$ alors

$$AB = |z_B - z_A| \text{ et } (\vec{u}, \overrightarrow{AB}) = \arg(z_B - z_A)[2\pi]$$

Démonstration.

On reprend les notations précédentes :

$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{AB}$ donc $(\vec{u}, \overrightarrow{AB}) = (\vec{u}, \overrightarrow{OM})$. Or

$$\begin{aligned} (\vec{u}; \overrightarrow{OM}) &= \arg(z_M) \\ &= \arg(z_B - z_A)[2\pi] \end{aligned}$$

Donc : $(\vec{u}; \overrightarrow{AB}) = \arg(z_B - z_A)[2\pi]$. $\square$

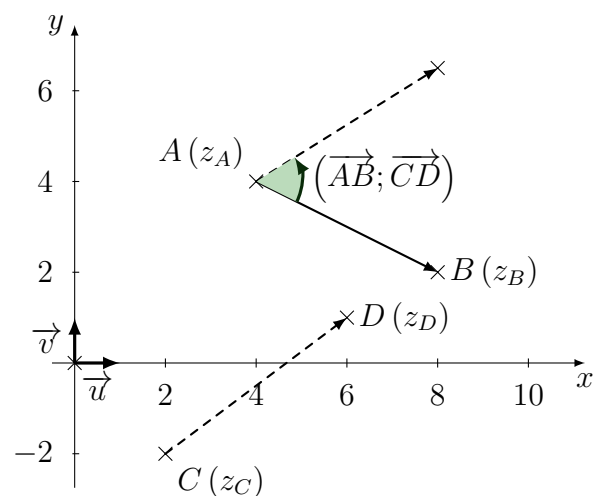
■ COROLLAIRE :

Dans le plan complexe muni du repère orthonormé $(O; \vec{u}, \vec{v})$, si $A(z_A)$, $B(z_B)$, $C(z_C)$ et $D(z_D)$, où $A \neq B$ et $C \neq D$, alors :

$$(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}) = \arg\left(\frac{z_D - z_C}{z_B - z_A}\right)[2\pi]$$

Démonstration.

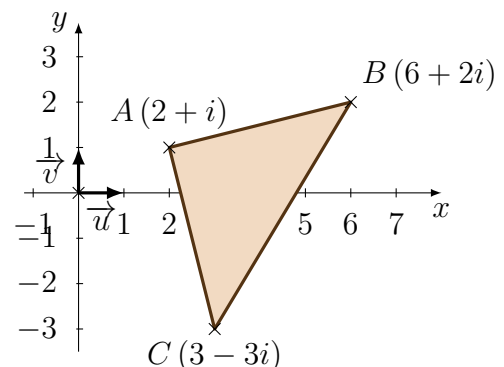
$$\begin{aligned} (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}) &= (\overrightarrow{AB}, \vec{u}) + (\vec{u}, \overrightarrow{CD})[2\pi] \\ &= -(\vec{u}, \overrightarrow{AB}) + (\vec{u}, \overrightarrow{CD})[2\pi] \\ &= -\arg(z_B - z_A) + \arg(z_D - z_C)[2\pi] \\ &= \arg(z_D - z_C) - \arg(z_B - z_A)[2\pi] \\ &= \arg\left(\frac{z_D - z_C}{z_B - z_A}\right)[2\pi] \end{aligned}$$



Exemple :

Soient $A(2+i)$, $B(6+2i)$ et $C(3-3i)$.

Montrer que le triangle ABC est isocèle rectangle direct en A .



Calculons d'abord les longueurs :

$$\begin{aligned} AC &= |z_C - z_A| & AB &= |z_B - z_A| \\ &= |(3 - 3i) - (2 + i)| & &= |(6 + 2i) - (2 + i)| \\ &= |1 - 4i| & &= |4 + i| \\ &= \sqrt{1 + 16} & &= \sqrt{16 + 1} \\ &= \sqrt{17} & &= \sqrt{17} \end{aligned}$$

Donc $AC = AB$, le triangle est isocèle en A .

Calculons l'angle $(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AB})$:

$$\begin{aligned} (\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AB}) &= \arg\left(\frac{z_B - z_A}{z_C - z_A}\right) \\ &= \arg\left(\frac{4 + i}{1 - 4i}\right) \end{aligned}$$

Or,

$$\begin{aligned} \frac{4 + i}{1 - 4i} &= \frac{(4 + i)(1 + 4i)}{(1 - 4i)(1 + 4i)} \\ &= \frac{4 + 16i + i - 4}{1 + 16} \\ &= \frac{17i}{17} = i \end{aligned}$$

Donc $(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AB}) = \arg(i) = \frac{\pi}{2}[2\pi]$.

Le triangle est donc isocèle rectangle direct en A .

Remarques : Soient $A(a)$, $B(b)$ et $M(z)$.

1. La caractérisation d'un réel par son argument permet d'écrire pour tout $z \in \mathbb{C} \setminus \{a; b\}$:

$$\begin{aligned} \frac{z - a}{z - b} \in \mathbb{R}^* &\Leftrightarrow \arg\left(\frac{z - a}{z - b}\right) = 0[\pi] \\ &\Leftrightarrow (\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}) = 0[\pi] \\ &\Leftrightarrow M \in (AB) \setminus \{A; B\}. \end{aligned}$$

2. La caractérisation d'un imaginaire pur par son argument permet d'écrire : pour tout $z \in \mathbb{C} \setminus \{a; b\}$,

$$\begin{aligned} \frac{z - a}{z - b} \in i\mathbb{R}^* &\Leftrightarrow \arg\left(\frac{z - a}{z - b}\right) = \frac{\pi}{2}[\pi] \\ &\Leftrightarrow (\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}) = \frac{\pi}{2}[\pi] \\ &\Leftrightarrow M \in \mathcal{C}[AB] \setminus \{A; B\} \end{aligned}$$

Les transformations du plan telles que les translations, rotations, homothéties admettent des expressions complexes très utiles en pratique. Nous les verrons dans le chapitre sur les similitudes.

5. Racines n -ièmes d'un complexe non nul

■ DÉFINITION :

Soit $C \in \mathbb{C}^*$ et $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$.

On appelle **racine n -ième de C** , tout complexe z vérifiant : $z^n = C$.

Exemple :

Quels sont les complexes z tels que $z^3 = -i$, c'est-à-dire les racines cubiques de $-i$?

Nous allons les chercher sous forme exponentielle : on pose $z = re^{i\varphi}$ où $r > 0$ et $\varphi \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} z^3 = -i &\Leftrightarrow (re^{i\varphi})^3 = 1e^{-i\frac{\pi}{2}} \\ &\Leftrightarrow r^3 e^{3i\varphi} = 1e^{-i\frac{\pi}{2}} \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} r^3 = 1 \\ 3\varphi = -\frac{\pi}{2}[2\pi] \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} r = \sqrt[3]{1} = 1 \\ \varphi = -\frac{\pi}{6}[2\pi] \text{ ou } \varphi = -\frac{\pi}{6} + \frac{2\pi}{3} = \frac{\pi}{2}[2\pi] \\ \text{ou } \varphi = -\frac{\pi}{6} + \frac{4\pi}{3} = \frac{7\pi}{6}[2\pi] \end{cases}$$

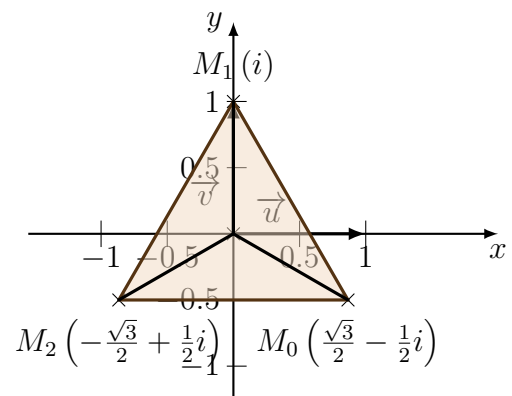
D'où les trois racines cubiques de $-i$:

$$z_0 = 1e^{-i\frac{\pi}{6}} = \cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i$$

$$z_1 = 1e^{i\frac{\pi}{2}} = i$$

$$z_2 = 1e^{i\frac{7\pi}{6}} = \cos\left(\frac{7\pi}{6}\right) + i\sin\left(\frac{7\pi}{6}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i$$

On peut représenter les images de ces trois racines cubiques dans le plan complexe.



Il apparaît que le triangle $M_0M_1M_2$ est équilatéral de centre O : en effet, par construction

$$\begin{aligned} OM_0 = OM_1 = OM_2 &\text{ et } (\overrightarrow{OM_0}, \overrightarrow{OM_1}) = (\overrightarrow{OM_1}, \overrightarrow{OM_2}) \\ &= (\overrightarrow{OM_2}, \overrightarrow{OM_0}) \\ &= \frac{2\pi}{3}[2\pi] \end{aligned}$$

$M_0M_1M_2$ est un polygone régulier de centre O .

■ PROPRIÉTÉ :

Tout nombre complexe $C = \rho e^{i\theta} \in \mathbb{C}^*$ admet exactement n racines n -ièmes distinctes

$$z_k = \sqrt[n]{\rho} e^{i\left(\frac{\theta+2k\pi}{n}\right)}, \quad k \in \llbracket 0; n-1 \rrbracket.$$

Démonstration.

Cas $n = 2$: ce cas a déjà été entièrement traité dans la partie 1 du cours : tout nombre complexe C non nul admet deux racines carrées complexes distinctes.

Cas $n > 2$: Nous allons chercher les racines n -ièmes z de C sous forme exponentielle.

On pose donc : $C = \rho e^{i\theta}$ et $z = r e^{i\varphi}$ où $r, \rho > 0$ et $\theta, \varphi \in \mathbb{R}$: les réels ρ et θ sont connus, les réels r et φ sont les inconnues. Ainsi z est une racine n -ième de C si et seulement si

$$z^n = C \text{ i.e. } (r e^{i\varphi})^n = \rho e^{i\theta} \text{ i.e. } r^n e^{in\varphi} = \rho e^{i\theta}$$

$$\text{i.e. } \begin{cases} r^n = \rho \\ n\varphi = \theta + 2k\pi \end{cases}$$

$$\text{i.e. } \begin{cases} r = \sqrt[n]{\rho} \text{ au sens de la racine } n\text{-ième} \\ \quad \quad \quad \text{d'un réel positif} \\ \varphi = \frac{\theta}{n} + \frac{2k\pi}{n}, k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

Donc $|z| = \sqrt[n]{\rho}$ et $\arg(z) = \frac{\theta}{n} + \frac{2k\pi}{n}$ ce qui définit n valeurs distinctes modulo 2π pour cet argument.

□

Remarque : Pour les mêmes raisons que dans l'exemple précédent, les points $M_0, M_1, \dots$ et M_{n-1} d'affixes respectives $z_0, z_1, \dots$ et z_{n-1} dans le plan complexe sont les sommets d'un polygone régulier de centre O .

Exemples :

1) Déterminer les racines carrées de i avec la même méthode.

$$i = 1 \times e^{i\frac{\pi}{2}}$$

$$\text{Pour } z^2 = i, \text{ on a : } z_k = \sqrt[2]{1} e^{i\left(\frac{\frac{\pi}{2}+2k\pi}{2}\right)} = e^{i\left(\frac{\pi}{4}+k\pi\right)}$$

$$\text{Pour } k = 0 : z_0 = e^{i\frac{\pi}{4}} = \frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\text{Pour } k = 1 : z_1 = e^{i\frac{5\pi}{4}} = -\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}$$

2) Déterminer les racines cubiques de 1.

$$1 = 1 \times e^{i \times 0}$$

$$\text{Pour } z^3 = 1, \text{ on a : } z_k = e^{i\frac{2k\pi}{3}}$$

$$\text{Pour } k = 0 : z_0 = 1$$

$$\text{Pour } k = 1 : z_1 = e^{i\frac{2\pi}{3}} = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\text{Pour } k = 2 : z_2 = e^{i\frac{4\pi}{3}} = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

Remarque : On note respectivement j et j^2 les nombres complexes z_1 et z_2 . On a $j^2 = \overline{j}$.