

Exercice n°1

Soit (E) l'équation différentielle : $y'' - y' - 2y = 0$.

Le but de l'exercice est de déterminer une solution f de (E) deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ et telle que :

$$f(0) = 0 \text{ et } f'(0) = 1.$$

1) On pose : $g = f' - 2f$.

a) Vérifier que g est une solution de l'équation différentielle (E') : $y' + y = 0$ et que $g(0) = 1$.

b) Déterminer la fonction g .

2) Soit (E'') l'équation différentielle : $y' - 2y = e^{-x}$.

a) Démontrer que la fonction φ définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\varphi(x) = -\frac{1}{3}e^{-x}$$

est une solution de l'équation différentielle (E'') .

b) Démontrer qu'une fonction h définie sur $\mathbb{R}$ est solution de l'équation différentielle (E'') si et seulement si il existe une fonction u solution de l'équation différentielle :

$$y' - 2y = 0 \text{ telle que } h = u + \varphi.$$

c) Déterminer l'ensemble des solutions de l'équation différentielle : $y' - 2y = 0$ puis l'ensemble des solutions de l'équation différentielle (E'') .

3) Dédurre de ce qui précède l'existence et l'unicité de la fonction f .

Exercice n°1

Soit (E) l'équation différentielle : $y'' - y' - 2y = 0$.

Le but de l'exercice est de déterminer une solution f de (E) deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ et telle que :

$$f(0) = 0 \text{ et } f'(0) = 1.$$

1) On pose : $g = f' - 2f$.

a) Vérifier que g est une solution de l'équation différentielle (E') : $y' + y = 0$ et que $g(0) = 1$.

b) Déterminer la fonction g .

2) Soit (E'') l'équation différentielle : $y' - 2y = e^{-x}$.

a) Démontrer que la fonction φ définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\varphi(x) = -\frac{1}{3}e^{-x}$$

est une solution de l'équation différentielle (E'') .

b) Démontrer qu'une fonction h définie sur $\mathbb{R}$ est solution de l'équation différentielle (E'') si et seulement si il existe une fonction u solution de l'équation différentielle :

$$y' - 2y = 0 \text{ telle que } h = u + \varphi.$$

c) Déterminer l'ensemble des solutions de l'équation différentielle : $y' - 2y = 0$ puis l'ensemble des solutions de l'équation différentielle (E'') .

3) Dédurre de ce qui précède l'existence et l'unicité de la fonction f .

Exercice n°2

L'étude en laboratoire d'une population de petits rongeurs montre que sa croissance est exponentielle. En réalité, dans le secteur observé d'une région donnée, un prédateur empêche une telle croissance en tuant une certaine quantité de rongeurs.

On note $u(t)$ le nombre des rongeurs (exprimé en milliers) vivant au temps t (exprimé en années) dans cette région et on admet que la fonction u satisfait aux conditions suivantes :

$$(E): \begin{cases} u'(t) = \frac{u(t)}{4} - \frac{[u(t)]^2}{12} & (E_1) \\ u(0) = 1 & (E_2) \end{cases}$$

1) On suppose que, pour tout réel positif t , on a $u(t) > 0$. On considère, sur $[0; +\infty[$, la fonction

définie par $h = \frac{1}{u}$. Démontrer que u satisfait aux conditions (E) si et seulement si h satisfait aux

$$\text{conditions : } (E'): \begin{cases} h'(t) = -\frac{1}{4}h(t) + \frac{1}{12} & (E'_1) \\ h(0) = 1 & (E'_2) \end{cases}$$

2) Déterminer l'expression de h puis de u .

3) Comment se comporte la population quand t tend vers $+\infty$?

Exercice n°2

L'étude en laboratoire d'une population de petits rongeurs montre que sa croissance est exponentielle. En réalité, dans le secteur observé d'une région donnée, un prédateur empêche une telle croissance en tuant une certaine quantité de rongeurs.

On note $u(t)$ le nombre des rongeurs (exprimé en milliers) vivant au temps t (exprimé en années) dans cette région et on admet que la fonction u satisfait aux conditions suivantes :

$$(E): \begin{cases} u'(t) = \frac{u(t)}{4} - \frac{[u(t)]^2}{12} & (E_1) \\ u(0) = 1 & (E_2) \end{cases}$$

4) On suppose que, pour tout réel positif t , on a $u(t) > 0$. On considère, sur $[0; +\infty[$, la fonction

définie par $h = \frac{1}{u}$. Démontrer que u satisfait aux conditions (E) si et seulement si h satisfait aux

$$\text{conditions : } (E'): \begin{cases} h'(t) = -\frac{1}{4}h(t) + \frac{1}{12} & (E'_1) \\ h(0) = 1 & (E'_2) \end{cases}$$

5) Déterminer l'expression de h puis de u .

6) Comment se comporte la population quand t tend vers $+\infty$?