

Exercice 1

- 1) a) Soit f une solution de l'équation différentielle (E) : $y'' - y' - 2y = 0$ deux fois dérivable sur $\sim$ donc on a : $f'' - f' - 2f = 0$ [1]. Si $g = f' - 2f$, on en déduit : $g' = f'' - 2f'$ qui peut encore s'écrire : $f'' = g' + 2f'$. En remplaçant dans [1], on obtient : $g' + 2f' - f' - 2f = 0$ soit : $g' + f' - 2f = 0 \Leftrightarrow g' + g = 0$. Donc g est solution de l'équation différentielle (E') : $y' + y = 0$.

On a de plus : $g(0) = f'(0) - 2f(0) = 1 - 2 \times 0 = 1$.

- b) (E') équivaut à : $y' = -y$. Les solutions de cette équation différentielle sont les fonctions définies sur $\sim$ par : $x \mapsto Ce^{-x}$, avec C réel quelconque. La fonction g vérifie la condition initiale : $g(0) = 1$ d'où : $Ce^0 = 1$ ce qui donne $C = 1$. Donc la fonction g est définie sur $\sim$ par : $g(x) = e^{-x}$.

- 2) a) Soit φ , définie sur $\sim$ par : $\varphi(x) = -\frac{1}{3}e^{-x}$.

φ est dérivable sur $\sim$ et $\varphi'(x) = -\frac{1}{3} \times (-e^{-x}) = \frac{1}{3}e^{-x}$.

Pour tout réel x , on a :

$$\varphi'(x) - 2\varphi(x) = (1/3)e^{-x} + (2/3)e^{-x} = e^{-x}.$$

Donc φ est bien solution de (E'').

- b) h définie et dérivable sur $\sim$ est solution de (E'') si et seulement si pour, tout réel x , $h'(x) - 2h(x) = e^{-x}$ [2].

Or pour tout réel x , $\varphi'(x) - 2\varphi(x) = e^{-x}$.

L'équation [2] équivaut alors à :

pour tout réel x , $h'(x) - 2h(x) = \varphi'(x) - 2\varphi(x)$,

ce qui équivaut à $(h - \varphi)'(x) - 2(h - \varphi)(x) = 0$.

Cela signifie que $h - \varphi$ est solution de l'équation différentielle $y' - 2y = 0$ ce qui équivaut à dire qu'il existe une fonction u solution de cette équation différentielle telle que $u = h - \varphi$,

ce qui s'écrit aussi : $h = u + \varphi$.

- c) L'ensemble des solutions de l'équation différentielle : $y' - 2y = 0$ est l'ensemble des fonctions u définies sur $\sim$ par : $u(x) = Ce^{2x}$ où C est une constante réelle. D'après 2)b)c), les solutions de (E'') sont les fonctions h définies par : $h(x) = Ce^{2x} - \frac{1}{3}e^{-x}$ ($C \in \sim$).

- 3) En considérant 1), une solution f de (E) est telle que pour tout réel x : $f'(x) - 2f(x) = e^{-x}$ avec $f(0) = 0$. Donc f est solution de l'équation différentielle (E') d'où, pour tout réel x : $f(x) = Ce^{2x} - \frac{1}{3}e^{-x}$.

On calcule C avec la condition $f(0) = 0$, ou

encore $C = 1/3$. Donc f est définie pour tout réel x

par : $f(x) = (e^{2x} - e^{-x})/3$. Vérifions que f remplit les

conditions de départ : f est dérivable sur $\sim$ car somme de fonctions dérivables sur $\sim$, divisée par 3,

et : pour tout réel x : $f'(x) = (2e^{2x} + e^{-x})/3$.

f' est dérivable sur $\sim$ pour la même raison et, pour tout réel x : $f''(x) = (4e^{2x} - e^{-x})/3$.

Montrons que cette fonction f est solution de (E) : pour tout réel x : $f''(x) - f'(x) - 2f(x) =$

$$(4e^{2x} - e^{-x} - 2e^{2x} - e^{-x} - 2e^{2x} + 2e^{-x})/3 = 0.$$

De plus, $f(0) = 0$ (voir ci-dessus) et $f'(0) = 1$.

Donc f existe et est unique.

Exercice 2

- 1) $u > 0$ donc u satisfait les conditions (E)

si et seulement si $\frac{u'(t)}{[u(t)]^2} = \frac{1}{4u(t)} - \frac{1}{12}$ et $u(0) = 1$.

On pose $h = 1/u$. Par inverse, h est dérivable sur

$[0; +\infty[$ et $h' = -u'/u^2$, ainsi u satisfait les conditions

(E) si et seulement si $-h'(t) = \frac{1}{4}h(t) - \frac{1}{12}$ et $h(0) = 1$

donc si et seulement si h satisfait aux conditions (E').

- 2) (E') équivaut à : pour tout t de $[0; +\infty[$,

$$h(t) = ke^{-t/4} + 1/3 \text{ et } h(0) = 1.$$

La solution de (E') est donc la fonction définie sur

$[0; +\infty[$ par $h(t) = (2e^{-t/4} + 1)/3$. On en déduit que :

pour tout t de $[0; +\infty[$, $u(t) = \frac{3}{2e^{-t/4} + 1}$.

- 3) Lorsque t tend vers $+\infty$, $-t/4$ tend vers $-\infty$.

Quand T tend vers $-\infty$, e^T tend vers 0 donc

(limite d'une composée) $e^{-t/4}$ tend vers 0.

On en déduit que $\frac{2}{3}e^{-t/4} + \frac{1}{3}$ tend vers $\frac{1}{3}$ donc

(limite d'un inverse) $\lim_{t \rightarrow +\infty} u(t) = 3$.

La population de rongeurs tend vers 3000 individus lorsque t tend vers $+\infty$.