

Exercice 4**4 points****Partie A**

On considère l'équation différentielle

$$(E_1) : y' + 0,48y = \frac{1}{250},$$

où y est une fonction de la variable t appartenant à l'intervalle $[0 ; +\infty[$.

1. On considère la fonction constante h définie sur l'intervalle $[0 ; +\infty[$ par $h(t) = \frac{1}{120}$.
Montrer que la fonction h est solution de l'équation différentielle (E_1) .
2. Donner la forme générale des solutions de l'équation différentielle $y' + 0,48y = 0$.
3. En déduire l'ensemble des solutions de l'équation différentielle (E_1) .

Partie B

On s'intéresse à présent à l'évolution d'une population de bactéries dans un milieu de culture.

À un instant $t = 0$, on introduit une population initiale de 30 000 bactéries dans le milieu. On note $p(t)$ la quantité de bactéries, exprimée en millier d'individus, présente dans le milieu après un temps t , exprimé en heure.

On a donc $p(0) = 30$.

On admet que la fonction p définie sur l'intervalle $[0 ; +\infty[$ est dérivable, strictement positive sur cet intervalle et qu'elle est solution de l'équation différentielle (E_2) :

$$p' = \frac{1}{250}p \times (120 - p)$$

Soit y la fonction strictement positive sur l'intervalle $[0 ; +\infty[$ telle que, pour tout t appartenant à l'intervalle $[0 ; +\infty[$, on a $p(t) = \frac{1}{y(t)}$.

1. Montrer que si p est solution de l'équation différentielle (E_2) , alors y est solution de l'équation différentielle $(E_1) : y' + 0,48y = \frac{1}{250}$.
2. On admet réciproquement que, si y est une solution strictement positive de l'équation différentielle (E_1) , alors $p = \frac{1}{y}$ est solution de l'équation différentielle (E_2) .

Montrer que, pour tout t appartenant à l'intervalle $[0 ; +\infty[$, on a :

$$p(t) = \frac{120}{1 + Ke^{-0,48t}} \text{ avec } K \text{ une constante réelle.}$$

3. En utilisant la condition initiale, déterminer la valeur de K .
4. Déterminer $\lim_{t \rightarrow +\infty} p(t)$. En donner une interprétation dans le contexte de l'exercice.
5. Déterminer le temps nécessaire pour que la population de bactéries dépasse 60 000 individus.

On donnera le résultat sous la forme d'une valeur arrondie exprimée en heures et minutes.

EXERCICE 4**4 points****Partie A :**

On considère l'équation différentielle $(E_1) : y' + 0,48y = \frac{1}{250}$ où y est une fonction de la variable t définie sur l'intervalle $[0; +\infty[$.

1. La fonction h est dérivable sur $[0; +\infty[$ et pour tout réel positif t , $h'(t) = 0$. On a dont $h'(t) + 0,48h(t) = 0 + 0,48 \times \frac{1}{120} = \frac{1}{250}$

Donc la fonction h est solution de l'équation différentielle (E_1) .

2. Les solutions de l'équation différentielle $y' + 0,48y = 0$ sont les fonctions de la forme $f(t) = Ce^{-0,48t}$ avec $C \in \mathbb{R}$.
3. Les solutions de l'équation différentielle (E_1) sont donc les fonctions de la forme $f(t) = Ce^{-0,48t} + \frac{1}{120}$ avec $C \in \mathbb{R}$.

Partie B :

1. Supposons que p est solution de l'équation différentielle (E_2) ,

$$\text{On a donc } p' = \frac{1}{250}p \times (120 - p)$$

$$\text{Or } p = \frac{1}{y} \text{ et } p' = \frac{-y'}{y^2}$$

$$\frac{-y'}{y^2} = \frac{1}{250} \frac{1}{y} \times \left(120 - \frac{1}{y}\right) \Rightarrow -y' = y^2 \times \frac{1}{250y} \times \frac{120y - 1}{y}$$

$$\begin{aligned} \text{D'où} \quad & \Leftrightarrow -y' = \frac{1}{250} \times (120y - 1) \\ & \Leftrightarrow -y' = 0,48y - \frac{1}{250} \\ & \Leftrightarrow y' + 0,48y = \frac{1}{250} \end{aligned}$$

Donc y est solution de l'équation différentielle (E_1) : $y' + 0,48y = \frac{1}{250}$.

2. y est de la forme $y(t) = Ce^{-0,48t} + \frac{1}{120}$ avec $C \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} \text{on a donc } p(t) &= \frac{1}{y(t)} \\ &= \frac{1}{Ce^{-0,48t} + \frac{1}{120}} \text{ avec } C \in \mathbb{R} \\ &= \frac{120}{120Ce^{-0,48t} + 1} \text{ avec } C \in \mathbb{R} \\ &= \frac{120}{Ke^{-0,48t} + 1} \text{ avec } K \in \mathbb{R} \text{ en posant } K = 120C \end{aligned}$$

3. On sait que $p(0) = 30$ donc $\frac{120}{Ke^0 + 1} = 30$,

$$\text{donc } \frac{120}{30} = K + 1 \text{ d'où } K = \frac{120}{30} - 1 = 3.$$

4. On sait que : $\begin{cases} \lim_{t \rightarrow +\infty} -0,48t = -\infty \\ \lim_{X \rightarrow -\infty} e^X = 0 \end{cases}$ donc, par composition, $\lim_{t \rightarrow +\infty} e^{-0,48t} = 0$.

$$\text{Donc, par produit et somme, } \lim_{t \rightarrow +\infty} 1 + 3e^{-0,48t} = 1$$

$$\text{et finalement par quotient, } \lim_{t \rightarrow +\infty} p(t) = 120.$$

Dans le contexte de l'exercice la population de la bactérie se stabilisera vers 120 000.

$$\begin{aligned} 5. \quad p(t) = 60 &\Leftrightarrow \frac{120}{3e^{-0,48t} + 1} = 60 \\ &\Leftrightarrow 120 = 60 \times (3e^{-0,48t} + 1) \\ &\Leftrightarrow 2 = 3e^{-0,48t} + 1 \\ &\Leftrightarrow \frac{1}{3} = e^{-0,48t} \\ &\Leftrightarrow -0,48t = \ln\left(\frac{1}{3}\right) = -\ln(3) \\ &\Leftrightarrow t = \frac{\ln(3)}{0,48} \approx 2,289 \end{aligned}$$

Le temps nécessaire pour que la population de bactéries dépasse 60 000 individus est de 2,289 heures soit 2 heures et 17 minutes.