

Sujets de Bac : Equations différentielles

Sujet 1 : Amérique du Sud – novembre 2008

1) Résoudre l'équation différentielle $2y' + y = 0$ (E) dont l'inconnue est une fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}$.

2) On considère l'équation différentielle

$$2y' + y = e^{-\frac{x}{2}}(x + 1) \quad (E')$$

a. Déterminer deux réels m et p tels que la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = e^{-\frac{x}{2}}(mx^2 + px)$$

soit une solution de (E').

b. Soit g une fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}$. Montrer que g est solution de (E') si et seulement si $g - f$ est solution de (E).

Résoudre l'équation (E').

3) Etudier les variations de la fonction h définie sur $\mathbb{R}$ par

$$h(x) = \frac{1}{4}e^{-\frac{x}{2}}(x^2 + 2x)$$

4) Déterminer les limites en $+\infty$ et en $-\infty$ de h .

5) Dans le plan rapporté à un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$, on note $\mathcal{C}$ la courbe représentative de la fonction h et Γ celle de la fonction $x \mapsto e^{-\frac{x}{2}}$.

a. Etudier les positions relatives de $\mathcal{C}$ et de Γ .

b. Tracer ces deux courbes sur un même graphique.

Sujet 2 : Amérique du Sud – novembre 2007

1) On suppose connu le résultat suivant : la fonction $x \mapsto e^x$ est l'unique fonction ϕ dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que $\phi' = \phi$ et $\phi(0) = 1$. On considère un réel a .

a. Montrer que la fonction $f: x \mapsto e^{ax}$ définie sur $\mathbb{R}$ est solution de l'équation différentielle $y' = ay$.

b. On considère une fonction g solution de l'équation différentielle $y' = ay$ et on note h la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = g(x)e^{-ax}$. Montrer que h est constante.

c. En déduire l'ensemble des solutions de $y' = ay$.

2) On considère l'équation différentielle (E) : $y' = 2y + \cos x$.

a. Déterminer les réels a et b pour que la fonction f_0 définie sur $\mathbb{R}$ par $f_0(x) = a \cos x + b \sin x$ soit solution de (E).

b. Résoudre l'équation différentielle (E_0) : $y' = 2y$.

c. Démontrer que f est solution de (E) si et seulement si $f - f_0$ est solution de (E_0).

d. En déduire les solutions de (E).

e. Déterminer la solution k de (E) vérifiant $k\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$.

Sujet 3 : France – septembre 2005

On considère les deux équations différentielles définies sur $\left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[$:

$$(E) \quad y' + (1 + \tan x)y = \cos x \qquad (E_0) \quad y' + y = 1$$

1) Déterminer les solutions de (E_0).

2) On considère deux fonctions f et g dérivables sur $\left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[$ telles que $f(x) = g(x) \cos x$.

Démontrer que f est solution de (E) si et seulement si g est solution de (E_0).

3) Déterminer la solution f de (E) telle que $f(0) = 0$.

Correction

Sujet 1 : Amérique du Sud – novembre 2008

1) L'équation différentielle (E) est de la forme $y' + ay = 0$ avec $a = \frac{1}{2}$ donc les solutions sont les fonctions f_k définies et dérivables sur $\mathbb{R}$ par $f_k(x) = ke^{-\frac{x}{2}}$ avec k un nombre réel.

2)

a.

f est solution de (E) $\Leftrightarrow$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, $2f'(x) + f(x) = e^{-\frac{x}{2}}(x+1)$

Or f est de la forme $u \times e^v$ avec $u: x \mapsto mx^2 + px$ dérivable sur $\mathbb{R}$ et $v: x \mapsto -\frac{x}{2}$ dérivable sur $\mathbb{R}$ donc f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et :

$$\begin{aligned} f'(x) &= u'(x)e^{v(x)} + u(x) \times v'(x)e^{v(x)} = (2mx + p)e^{-\frac{x}{2}} + (mx^2 + px) \times \left(-\frac{1}{2}\right)e^{-\frac{x}{2}} \\ &= e^{-\frac{x}{2}} \left(-\frac{1}{2}mx^2 - \frac{1}{2}px + 2xm + p\right) \end{aligned}$$

$$\text{Donc } 2f'(x) + f(x) = e^{-\frac{x}{2}}(-mx^2 - px + 4mx + 2p) + e^{-\frac{x}{2}}(mx^2 + px) = e^{-\frac{x}{2}}(4mx + 2p)$$

$$\text{Par identification avec le second membre de (E) : } \begin{cases} 4m = 1 \\ 2p = 1 \end{cases} \text{ ou encore } \begin{cases} m = \frac{1}{4} \\ p = \frac{1}{2} \end{cases}$$

Finalement $f: x \mapsto e^{-\frac{x}{2}}\left(\frac{x^2}{4} + \frac{x}{2}\right)$ est solution de (E).

b. g est solution de (E') donc $2g'(x) + g(x) = e^{-\frac{x}{2}}(x+1)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

g solution de (E') $\Leftrightarrow 2g'(x) + g(x) = e^{-\frac{x}{2}}(x+1)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$

$$\Leftrightarrow 2g'(x) + g(x) = 2f'(x) + f(x) \text{ pour tout } x \in \mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow 2(g' - f')(x) + g(x) - f(x) = 0 \text{ pour tout } x \in \mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow g - f \text{ est solution de (E)}$$

$$\Leftrightarrow \text{il existe } k \in \mathbb{R}, \quad g(x) - f(x) = ke^{-\frac{x}{2}}$$

$$\Leftrightarrow \text{il existe } k \in \mathbb{R}, g(x) = ke^{-\frac{x}{2}} + f(x)$$

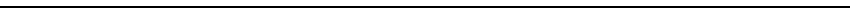
Les solutions de (E') sont donc les fonctions $x \mapsto ke^{-\frac{x}{2}} + e^{-\frac{x}{2}}\left(\frac{x^2}{4} + \frac{x}{2}\right)$ avec $k \in \mathbb{R}$.

3) $h: x \mapsto \frac{1}{4}e^{-\frac{x}{2}}(x^2 + 2x)$ est solution de (E') (il suffit de prendre $k = 0$).

$$h'(x) = \frac{1}{4} \times \left(-\frac{1}{2}\right)e^{-\frac{x}{2}}(x^2 + 2x) + \frac{1}{4}e^{-\frac{x}{2}}(2x + 2) = \frac{1}{4}e^{-\frac{x}{2}}\left(-\frac{x^2}{2} - x + 2x + 2\right) = \frac{1}{4}e^{-\frac{x}{2}}\left(-\frac{x^2}{2} + x + 2\right)$$

$\frac{1}{4}e^{-\frac{x}{2}}$ est positif car la fonction exponentielle est strictement positive. Donc $h'(x)$ est du signe de $-\frac{x^2}{2} + x + 2$ qui est un polynôme du second degré. $\Delta = 5$ donc $-\frac{x^2}{2} + x + 2$ est du signe de $a = -\frac{1}{2}$ sauf entre les racines :

$$x_1 = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2 \times \left(-\frac{1}{2}\right)} = 1 - \sqrt{5} \text{ et } x_2 = 1 + \sqrt{5}$$

x	$-\infty$	$1 - \sqrt{5}$		$1 + \sqrt{5}$	$+\infty$	
Signe de $h'(x)$		-	0	+	0	-
Variations de h						

4) Limite en $-\infty$:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} -\frac{x}{2} = +\infty \text{ et } \lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty \text{ donc par composition } \lim_{x \rightarrow -\infty} e^{-\frac{x}{2}} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} x^2 + 2x = +\infty \text{ donc par produit } \boxed{\lim_{x \rightarrow -\infty} h(x) = +\infty}$$

On pose $X = -\frac{x}{2}$: $h(x) = \frac{1}{4}e^{-\frac{x}{2}}(x^2 + 2x) = \frac{1}{4}e^X(4X^2 - 2Xe^X X^2 - \frac{1}{2}Xe^X$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} X = -\infty$ et $\lim_{X \rightarrow -\infty} X^2 e^X = 0$ et $\lim_{X \rightarrow -\infty} X e^X = 0$ donc par composition $\boxed{\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = 0}$

5) Pour $x \in \mathbb{R}$:

$$h(x) - e^{-\frac{x}{2}} = \frac{1}{4}e^{-\frac{x}{2}}(x^2 + 2x - 4)$$

$\frac{1}{4}e^{-\frac{x}{2}}$ est positif donc $h(x) - e^{-\frac{x}{2}}$ est du signe de $x^2 + 2x - 4$:

$\Delta = 20$ donc $x^2 + 2x - 4$ est du signe de $a = 1$ sauf entre les racines : $x_1 = \frac{-2+\sqrt{20}}{2} = -1 + \sqrt{5}$ et $x_2 = -1 - \sqrt{5}$.

Donc sur $] -\infty; -1 - \sqrt{5}[\cup] -1 + \sqrt{5}; +\infty[$, $\mathcal{C}$ est au dessus de Γ et sur $] -1 - \sqrt{5}; -1 + \sqrt{5}[$, $\mathcal{C}$ est en dessous de Γ

Sujet 2 : Amérique du Sud – novembre 2007

1)

a. f est de la forme $u \circ v$ avec $v(x) = ax$ dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que $v'(x) = a$ et $u(x) = e^x$ dérivable sur $\mathbb{R}$ avec $u'(x) = e^x$. Donc la fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f'(x) = v'(x)u'(v(x)) = ae^{ax}$ donc pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = af(x)$, ce qui signifie que $\boxed{f \text{ est solution de } y' = ay}$.

b. h est le produit de deux fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ donc est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $h'(x) = g'(x)e^{-ax} + g(x) \times (-a)e^{-ax}$ or $g'(x) = ag(x)$ car g est solution de l'équation différentielle $y' = ay$ donc $h'(x) = ag(x)e^{-ax} - ag(x)e^{-ax} = 0$

Comme ceci est vrai pour tout $x \in \mathbb{R}$, cela signifie que $\boxed{h \text{ est constante sur } \mathbb{R}}$.

c. Comme h est constante sur $\mathbb{R}$, il existe un réel k tel que $h(x) = k$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ ou encore $g(x)e^{-ax} = k$ ce qui signifie $g(x) = ke^{ax}$.

Finalement, si g est solution de $y' = ay$, alors il existe un réel k tel que pour tout réel x , $g(x) = ke^{ax}$.

Réciproquement, ces fonctions sont bien solutions de l'équation différentielle $y' = ay$ donc les solutions de $y' = ay$ sont les fonctions : $\boxed{x \mapsto ke^{ax} \text{ avec } k \in \mathbb{R}}$.

2)

a. $f_0(x) = a \cos x + b \sin x$ donc f_0 est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f_0'(x) = -a \sin x + b \cos x$. f_0 est solution de (E) donc pour tout réel x , $f_0'(x) = 2f_0(x) + \cos x$ ou encore $-a \sin x + b \cos x = 2a \cos x + 2b \sin x + \cos x$ et par identification des cosinus et des sinus, on a

$$\begin{cases} -a = 2b \\ b = 2a + 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -2b \\ b = -4b + 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -\frac{2}{5} \\ b = \frac{1}{5} \end{cases} \text{ donc finalement } \boxed{f_0(x) = -\frac{2}{5} \cos x + \frac{1}{5} \sin x}$$

b. $(E_0) : y' = 2y$ Les solutions sont les fonctions $\boxed{x \mapsto ke^{2x} \text{ avec } k \in \mathbb{R}}$.

c.

$f - f_0$ solution de $(E_0) \Leftrightarrow$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, $(f - f_0)'(x) = 2(f - f_0)(x)$

$\Leftrightarrow$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) - f_0'(x) = 2f(x) - 2f_0(x)$

$\Leftrightarrow$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = 2f(x) + f_0'(x) - 2f_0(x)$

$\Leftrightarrow$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = 2f(x) + \cos x$ car f_0 est solution de (E)

$\Leftrightarrow f$ solution de (E)

d.

f solution de (E) $\Leftrightarrow f - f_0$ solution de $(E_0) \Leftrightarrow$ il existe $k \in \mathbb{R}$, $(f - f_0)(x) = ke^{2x}$

$\Leftrightarrow$ il existe $k \in \mathbb{R}$, $f(x) = ke^{2x} + f_0(x) \Leftrightarrow$ il existe $k \in \mathbb{R}$, $f(x) = ke^{2x} - \frac{2}{5} \cos x + \frac{1}{5} \sin x$

Donc les solutions de (E) sont $\boxed{x \mapsto ke^{2x} - \frac{2}{5} \cos x + \frac{1}{5} \sin x \text{ avec } k \in \mathbb{R}}$.

e.

k est solution de (E) donc il existe un réel k_0 tel que $k(x) = k_0 e^{2x} - \frac{2}{5} \cos x + \frac{1}{5} \sin x$.

$$k\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0 \Leftrightarrow k_0 e^{\pi} - \frac{2}{5} \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + \frac{1}{5} \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0 \Leftrightarrow k_0 e^{\pi} + \frac{1}{5} = 0 \Leftrightarrow k_0 = -\frac{e^{-\pi}}{5}$$

Donc $\boxed{k: x \mapsto -\frac{e^{2x-\pi}}{5} - \frac{2}{5} \cos x + \frac{1}{5} \sin x}$

Sujet 3 : France – septembre 2005

1) $y' + y = 1 \Leftrightarrow y' = -y + 1$

L'ensemble de solutions de cette équation différentielle est $\boxed{\{x \mapsto ke^{-x} + 1 ; k \in \mathbb{R}\}}$.

2)

f solution de $(E) \Leftrightarrow$ pour tout $x \in \left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[$, $f'(x) + (1 + \tan x)f(x) = \cos x$

$\Leftrightarrow$ pour tout $x \in \left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[$, $g'(x) \cos x + g(x)(-\sin x) + (1 + \tan x)g(x) \cos x = \cos x$

$\Leftrightarrow$ pour tout $x \in \left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[$, $g'(x) \cos x - g(x) \sin x + g(x) \cos x + \frac{\sin x}{\cos x} g(x) \cos x = \cos x$

$\Leftrightarrow$ pour tout $x \in \left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[$, $g'(x) \cos x - g(x) \sin x + g(x) \cos x + g(x) \sin x = \cos x$

$\Leftrightarrow$ pour tout $x \in \left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[$, $g'(x) \cos x + g(x) \cos x = \cos x$

$\Leftrightarrow$ pour tout $x \in \left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[$, $g'(x) + g(x) = 1$ en divisant tout par $\cos x \neq 0$

$\Leftrightarrow g$ solution de (E_0)

3)

f solution de $(E) \Leftrightarrow g$ solution de $(E_0) \Leftrightarrow$ il existe $k \in \mathbb{R}$, $g(x) = ke^{-x} + 1$

$\Leftrightarrow$ il existe $k \in \mathbb{R}$, $f(x) = (ke^{-x} + 1) \cos x$

De plus comme $f(0) = 0$, on peut déterminer k :

$f(0) = 0 \Leftrightarrow (ke^0 + 1) \cos 0 = 0 \Leftrightarrow (k + 1) \times 1 = 0 \Leftrightarrow k = -1$

Finalement $\boxed{f: x \mapsto (1 - e^{-x}) \cos x}$