

# Équations différentielles

## 1. Généralités

### A. Définitions et vocabulaire

#### ■ DÉFINITION :

On appelle **équation fonctionnelle** une équation dont l'inconnue est une fonction.

#### Exemples :

Pour tout réel  $x > 0$ ,  $f(x^2) = 2f(x)$

La fonction **logarithme népérien** est une solution particulière de cette équation fonctionnelle.

Pour tout réel  $x$ ,  $f(2x) = 2(f(x))^2 - 1$ .

La fonction **cosinus** est une solution particulière de cette équation fonctionnelle.

pour tous réels  $a$  et  $b$ ,  $f(a+b) = f(a) \times f(b)$

La fonction **exponentielle** est une solution particulière de cette équation fonctionnelle.

#### ■ DÉFINITION :

On appelle **équation différentielle** une équation fonctionnelle définie par une relation entre une fonction  $f$ ,  $n$  fois dérivable sur un intervalle  $I$  de  $\mathbb{R}$ , et ses dérivées successives  $f'$ ,  $f''$ , ...,  $f^{(n)}$ .

L'entier  $n \geq 1$  est appelé l'**ordre de l'équation**.

#### ■ DÉFINITION :

**Résoudre une équation différentielle sur l'intervalle  $I$** , c'est déterminer toutes les fonctions,  $n$  fois dérivables sur  $I$ , vérifiant cette équation fonctionnelle.

#### Exemple :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = f(x)$$

est une équation différentielle d'ordre 1.

On cherche ici les fonctions dérivables sur  $\mathbb{R}$  égales à leurs dérivées; on pourrait noter  $f' = f$  mais il est parfois d'usage d'utiliser la notation abusive  $y' = y$  qui a l'avantage de simplifier l'écriture, mais l'inconvénient de confondre la fonction  $f$  et l'image  $y = f(x)$ . On ne se permettra cet abus que dans ce chapitre.

Concernant l'équation différentielle précédente, on sait que la fonction **exponentielle** en est une solution sur  $\mathbb{R}$ .

#### Exemple :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f''(x) = -f(x)$$

est une équation différentielle d'ordre 2, que l'on notera

$$y'' = -y$$

On sait que les fonctions **sinus et cosinus** en sont des solutions.

**Remarque :** Les primitives de  $g$  sur  $I$  sont les solutions (dérivables par définition) de l'équation différentielle  $y' = g(x)$ , c'est-à-dire

$$\forall x \in I, f'(x) = g(x)$$

$f$  s'appelle **la** solution générale de l'équation différentielle) et on montre qu'elle vérifie :

$$f = G + C$$

où  $G$  est une primitive de  $g$  sur  $I$  et  $C$  une constante quelconque (dite **constante d'intégration**).

On montre aussi que  $g$  admet une **unique** primitive  $f$  sur  $I$  vérifiant  $f(u) = v$ , où  $u$  est un élément de  $I$  et  $v$  un réel quelconque.

On peut donc distinguer une solution particulière des autres solutions en imposant une condition initiale (ici  $f(u) = v$ ).

Ces propriétés peuvent s'appliquer à d'autres équations différentielles.

#### Exemple :

Les primitives de la fonction nulle (donc les solutions de l'équation différentielle  $y' = 0$ ) sont les fonctions **constantes**.

**Remarque :** Il y a, bien sûr, une infinité d'équations différentielles et il n'existe pas une seule **méthode d'intégration** (c'est-à-dire de résolution commune à toutes les équations différentielles). Il y en a même dont on ne sait trouver explicitement les solutions.

L'objet de ce chapitre est d'évoquer un type d'équations différentielles que l'on retrouve fréquemment dans l'étude de certains phénomènes physiques classiques.

## ■ VOCABULAIRE :

Soit un entier  $n \geq 1$ , et soit  $u_0, \dots$  et  $u_n$  et  $g$  des fonctions continues sur  $I$ , intervalle de  $\mathbb{R}$ , sur lequel  $u_n$  ne s'annule pas.

On appelle équation différentielle **linéaire d'ordre  $n$**  une équation différentielle du type :

$$u_n(x)y^{(n)} + u_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \dots + u_1(x)y' + u_0(x)y = g(x)$$

Lorsque la fonction  $g$  est nulle, on dit qu'il s'agit d'une **équation différentielle homogène** (ou **sans second membre**).

Lorsque  $u_0, \dots$  et  $u_n$  sont des fonctions constantes, on dit qu'il s'agit d'une **équation différentielle à coefficients constants**.

## 2. Équations différentielles linéaires à coefficients constants du premier ordre

### A. Résolution de l'équation différentielle $y' - ky = 0$ sur $\mathbb{R}$

Notons  $(E)$  cette équation. Nous allons utiliser, entre autres méthodes, celle dite du **facteur intégrant**. Elle consiste à multiplier les deux membres de l'équation différentielle par un même terme qui fait apparaître des dérivées connues, que l'on peut alors intégrer facilement ; la difficulté, bien sûr, étant de trouver ce terme...

Pour  $(E)$ , un facteur intégrant possible est  $e^{-kx}$ , qui de plus est non nul, ce qui assure l'équivalence entre les deux équations, avant et après multiplication.

$$\begin{aligned} y' - ky = 0 &\iff e^{-kx}(y' - ky) = 0 \\ &\iff y'e^{-kx} - yke^{-kx} = 0 \\ &\iff (ye^{-kx})' = 0 \\ &\iff \exists C \in \mathbb{R}, ye^{-kx} = C \\ &\iff \exists C \in \mathbb{R}, y = Ce^{kx} \end{aligned}$$

## ■ PROPRIÉTÉ :

La solution générale sur  $\mathbb{R}$  de l'équation différentielle

$$y' - ky = 0$$

est

$$y = Ce^{kx}$$

avec  $C$  réel quelconque.

## Exemple :

Résoudre chacune des équations différentielles suivantes :

a)  $y' + 2y = 0$

Nous avons  $y' - (-2)y = 0$ .

Le facteur intégrant est  $e^{-kx} = e^{-(-2)x} = e^{2x}$ .

$$\begin{aligned} y' + 2y = 0 &\iff e^{2x}(y' + 2y) = 0 \\ &\iff y'e^{2x} + 2ye^{2x} = 0 \\ &\iff (ye^{2x})' = 0 \\ &\iff \exists C \in \mathbb{R}, ye^{2x} = C \\ &\iff \exists C \in \mathbb{R}, y = Ce^{-2x} \end{aligned}$$

b)  $2y' = 3y$

Nous avons  $2y' = 3y$  i.e.  $2y' - 3y = 0$

i.e.  $y' - \frac{3}{2}y = 0$ , donc  $k = \frac{3}{2}$ .

Le facteur intégrant est  $e^{-kx} = e^{-\frac{3x}{2}}$ .

$$\begin{aligned} 2y' = 3y &\iff y' - \frac{3}{2}y = 0 \\ &\iff e^{-\frac{3x}{2}}(y' - \frac{3}{2}y) = 0 \\ &\iff y'e^{-\frac{3x}{2}} - \frac{3}{2}ye^{-\frac{3x}{2}} = 0 \\ &\iff (ye^{-\frac{3x}{2}})' = 0 \\ &\iff \exists C \in \mathbb{R}, ye^{-\frac{3x}{2}} = C \\ &\iff \exists C \in \mathbb{R}, y = Ce^{\frac{3x}{2}} \end{aligned}$$

## ■ PROPRIÉTÉ :

Soient  $u$  et  $v$  deux réels. Alors il existe une unique fonction  $f$ , dérivable sur  $\mathbb{R}$ , solution de  $y' - ky = 0$ , et vérifiant  $f(u) = v$ .

## ■ PROPRIÉTÉ :

Soient  $\lambda$  et  $\mu$  deux réels. Si  $f$  et  $g$  sont deux solutions de l'équation  $(E) : y' - ky = 0$ , alors  $\lambda f + \mu g$  est aussi une solution de  $(E)$ .

**Remarque :** Cette dernière propriété se généralise à toute équation différentielle linéaire homogène (rappelons que  $\lambda f + \mu g$  s'appelle une **combinaison linéaire** de  $f$  et  $g$ ).

## B. Résolution de l'équation différentielle :

$$y' - ky = g(x) \text{ sur } \mathbb{R}$$

### ■ PROPRIÉTÉ :

Soit  $g$  une fonction continue sur un intervalle  $I$ .  
La solution générale de l'équation

$$y' - ky = g(x)$$

est  $y = e^{kx}H(x) + Ce^{kx}$ , où  $H$  est une primitive sur  $I$  de la fonction  $h = [x \mapsto e^{-kx}g(x)]$

*Démonstration.* Pour résoudre l'équation différentielle

$$y' - ky = g(x)$$

, utilisons le facteur intégrant  $e^{-kx}$ . En multipliant les deux membres de l'équation par  $e^{-kx}$  (qui est non nul), on obtient :

$$e^{-kx}y' - ke^{-kx}y = e^{-kx}g(x)$$

Le membre de gauche est la dérivée de  $e^{-kx}y$  :

$$(e^{-kx}y)' = e^{-kx}g(x)$$

En intégrant :

$$e^{-kx}y = H(x) + C$$

où  $H$  est une primitive de  $h$  telle que  $h(x) = e^{-kx}g(x)$ .  
En multipliant par  $e^{kx}$  (qui est non nul), on conclut que :

$$y = e^{kx}H(x) + Ce^{kx}$$

□

**Remarque :** Cette solution générale se présente comme la somme d'une solution particulière  $y = e^{kx}H(x)$  (obtenue pour  $C = 0$ ) et de la solution générale  $y = Ce^{kx}$  de l'équation différentielle homogène  $y' - ky = 0$ .

Il se trouve que l'on peut généraliser cette propriété à toutes les équation différentielle linéaires.

### ■ DÉFINITION :

Soit  $(D)$  une équation différentielle linéaire non homogène, c'est-à-dire de la forme  $y' - ky = g(x)$  où  $g$  est une fonction continue sur un intervalle  $I$ . On appelle **équation différentielle linéaire homogène associée**, notée  $(D_0)$ , l'équation différentielle linéaire obtenue en remplaçant dans  $(D)$  la fonction  $g$  par la fonction nulle.

**Remarque :** Montrons que si  $y_1$  et  $y_0$  sont deux fonctions solutions particulières de  $(D)$  alors  $y_1 - y_0$  est une solution particulière de  $(D_0)$ .

Si  $y_1$  et  $y_0$  sont deux solutions particulières de

$$(D) : y' - ky = g(x)$$

alors :

$$y_1' - ky_1 = g(x)$$

$$y_0' - ky_0 = g(x)$$

En soustrayant ces deux équations :

$$(y_1' - y_0') - k(y_1 - y_0) = g(x) - g(x)$$

$$\text{Soit } (y_1 - y_0)' - k(y_1 - y_0) = 0$$

Donc  $y_1 - y_0$  est solution de l'équation homogène

$$(D_0) : y' - ky = 0$$

### ■ PROPRIÉTÉ :

Donc, si on fixe une solution particulière  $y_0$  de  $(D)$ , et si on trouve la solution générale de  $(D_0)$ , notée  $Y$ , on obtient la solution générale  $y$  de  $(D)$  sous la forme

$$y = y_0 + Y$$

**Exemple :**

• **Cas particulier :** chercher une solution particulière dans le cas où  $g$  est constante, égale à  $A$ . En déduire la solution générale de l'équation différentielle :  $y' - ky = A$ .

Pour  $y' - ky = A$ , cherchons une solution particulière constante  $y_0 = a$ . Alors  $y_0' = 0$ , donc l'équation devient :  $0 - ka = A$ , d'où  $a = -\frac{A}{k}$  (si  $k \neq 0$ ).

La solution générale de l'équation homogène  $y' - ky = 0$  est  $Y = Ce^{kx}$ .

Donc la solution générale de  $y' - ky = A$  est :

$$y = -\frac{A}{k} + Ce^{kx}$$

• **Loi d'Ohm pour l'auto-inductance :** Appliquer ce résultat pour déterminer l'expression de l'intensité  $i$  en fonction de  $t$ ,  $R$ ,  $L$  et  $E$  dans le cas :

$$V_A - V_B = Ri + L \frac{di}{dt} = E$$

L'équation  $Ri + L \frac{di}{dt} = E$  se réécrit :

$$L \frac{di}{dt} + Ri = E$$

$$\frac{di}{dt} + \frac{R}{L}i = \frac{E}{L}$$

C'est une équation de la forme  $i' + \frac{R}{L}i = \frac{E}{L}$ .

En posant  $k = -\frac{R}{L}$ , on a  $i' - ki = \frac{E}{L}$ .

D'après le résultat précédent avec  $A = \frac{E}{L}$  :

$$i = -\frac{E/L}{-R/L} + Ce^{-\frac{R}{L}t} = \frac{E}{R} + Ce^{-\frac{R}{L}t}$$

où  $C$  est déterminée par les conditions initiales.