

Exercice 4**5 points****Pour les candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité**On considère la suite (u_n) définie, pour tout entier naturel non nul n , par :

$$u_n = \frac{n(n+2)}{(n+1)^2}.$$

La suite (v_n) est définie par : $v_1 = u_1$, $v_2 = u_1 \times u_2$ et pour tout entier naturel $n \geq 3$, $v_n = u_1 \times u_2 \times \dots \times u_n = v_{n-1} \times u_n$.

1. Vérifier que l'on a $v_2 = \frac{2}{3}$ puis calculer v_3 .

- 2.

On considère l'algorithme incomplet ci-contre. Recopier et compléter sur la copie cet algorithme afin que, après son exécution, la variable V contiennent la valeur v_n où n est un nombre entier naturel non nul définie par l'utilisateur.

Aucune justification n'est attendue.

Algorithme	
1.	$V \leftarrow 1$
2.	Pour i variant de 1 à n
3.	$U \leftarrow \frac{\dots(\dots+2)}{(\dots+1)^2}$
4.	$V \leftarrow \dots$
5.	Fin Pour

3.
 - a. Montrer que, pour tout entier naturel non nul n , $u_n = 1 - \frac{1}{(n+1)^2}$.
 - b. Montrer que, pour tout entier naturel non nul n , $0 < u_n < 1$.
4.
 - a. Montrer que la suite (v_n) est décroissante
 - b. Justifier que la suite (v_n) est convergente (on ne demande pas de calculer sa limite).
5.
 - a. Vérifier que, pour tout entier naturel non nul n , $v_{n+1} = v_n \times \frac{(n+1)(n+3)}{(n+2)^2}$.
 - b. Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel non nul n , $v_n = \frac{n+2}{2(n+1)}$.
 - c. Déterminer la limite de la suite (v_n) .
6. On considère la suite w_n définie par
 $w_1 = \ln(u_1)$, $w_2 = \ln(u_1) + \ln(u_2)$ et, pour tout entier naturel $n \geq 3$, par

$$w_n = \sum_{k=1}^n \ln(u_k) = \ln(u_1) + \ln(u_2) + \dots + \ln(u_n).$$

Montrer que $w_7 = 2w_1$.