

## Corrigé – Révision pour le DS - 2

1. D'après l'énoncé,  $u_2 - u_1 = 0,9(u_1 - u_0)$  donc  $u_2 = 0,9(5,1 - 5) + 5,1 = 5,19$ .

2.a. Pour tout entier naturel  $n$ ,  $A \times V_n = \begin{pmatrix} 1,9 & -0,9 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} u_{n+1} \\ u_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1,9u_{n+1} - 0,9u_n \\ u_{n+1} \end{pmatrix}$ .

Comme  $u_{n+2} - u_{n+1} = 0,9(u_{n+1} - u_n)$ , alors

$$u_{n+2} = u_{n+1} + 0,9(u_{n+1} - u_n) = 1,9u_{n+1} - 0,9u_n \text{ et donc } A \times V_n = \begin{pmatrix} v_{n+1} \\ u_{n+1} \end{pmatrix}.$$

Donc, pour tout entier naturel  $n$ , on a  $V_{n+1} = A \times V_n$ .

b. Avec la calculatrice, on trouve  $P^{-1} = \begin{pmatrix} -10 & 10 \\ 10 & -9 \end{pmatrix}$ .

$$P^{-1} \times A = \begin{pmatrix} -10 & 10 \\ 10 & -9 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1,9 & -0,9 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -19+10 & 9 \\ 19-9 & -9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -9 & 9 \\ 10 & -9 \end{pmatrix}.$$

$$P^{-1} \times A \times P = \begin{pmatrix} -9 & 9 \\ 10 & -9 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0,9 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8,1+9 & -9+9 \\ 9-9 & 10-9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,9 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Donc la matrice  $D$  vérifie  $D = \begin{pmatrix} 0,9 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ .

c. Démontrons que pour tout entier naturel  $n$ ,  $P(n) : A^n = P \times D^n \times P^{-1}$ .

*Initialisation* : D'une part  $A^0 = I_2$  et d'autre part  $D^0 = I_2$ ,

$$\text{alors } P \times D^0 \times P^{-1} = P \times I_2 \times P^{-1} = P \times P^{-1} = I_2.$$

La propriété  $P$  est vraie au rang 0.

*Hérédité* : Supposons que pour un certain entier naturel  $n$ ,  $P(n)$  est vraie.

Prouvons que  $P(n+1)$  est vraie.

$$A^{n+1} = A^n \times A = (P \times D^n \times P^{-1}) \times A, \text{ d'après l'hypothèse de récurrence.}$$

$$\text{Or } D = P^{-1} \times A \times P; \text{ alors } P \times D \times P^{-1} = P \times (P^{-1} \times A \times P) \times P^{-1}$$

$$= (P \times P^{-1}) \times A \times (P \times P^{-1}) = I_2 \times A \times I_2 = A.$$

Alors

$$A^{n+1} = (P \times D^n \times P^{-1}) \times (P \times D \times P^{-1}) = P \times D^n (P^{-1} \times P) D \times P^{-1} = P \times D^{n+1} \times P^{-1}$$

car  $P^{-1} \times P = I_2$ .

La propriété est héréditaire.

*Conclusion* : La propriété est vraie au rang 0 et est héréditaire à partir du rang 0.

D'après le principe de récurrence, pour tout entier naturel  $n$ ,  $A^n = P \times D^n \times P^{-1}$ .

d. On a donc, pour tout entier naturel  $n$ ,  $V_n = A^n \times V_0$ ,

$$\text{c'est-à-dire : } \begin{pmatrix} u_{n+1} \\ u_n \end{pmatrix} = A^n \times \begin{pmatrix} u_1 \\ u_0 \end{pmatrix}.$$

En égalisant les coefficients de la deuxième ligne des matrices ci-dessus, on obtient :

$$\begin{aligned} u_n &= (-10 \times 0,9^n + 10)u_1 + (10 \times 0,9^n - 9)u_0 \\ &= (-10 \times 0,9^n + 10) \times 5,1 + (10 \times 0,9^n - 9) \times 5 \\ &= -51 \times 0,9^n + 51 + 50 \times 0,9^n - 45 \\ &= -0,9^n + 6. \end{aligned}$$

3. La taille de la colonie au bout du 10<sup>e</sup> jour est :

$$u_{10} = 6 - 0,9^{10} \approx 5,651 \text{ arrondi à } 10^{-3}.$$

Au bout du dixième jour, il y aura donc environ 5 651 fourmis.

4. Comme  $-1 < 0,9 < 1$ ,  $\lim_{n \rightarrow +\infty} 0,9^n = 0$  et par limite de somme,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (-0,9^n + 6) = 6.$$

À long terme, le nombre de fourmis se rapprochera de 6 000 fourmis.